Занятие№14

Свойства логарифмов

В занятие№14 продолжение учебного материала по теме **Логарифмы,** акцентируется внимание на свойствах логарифмов. Напоминаю, что в рабочей тетради должен быть конспект, свойства логарифмов нужно выделить

Преобразование логарифмических выражений (решение примеров) разобрать и записать в тетрадь, при решении примеров нужно всегда помнить, что логарифм-это степень

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество:

$a^{\log_a b} = b$

Следствие: из равенства двух вещественных логарифмов следует равенство логарифмируемых выражений. В самом деле, если $\log_a b = \log_a c$, то $a^{\log_a b} = a^{\log_a c}$, откуда, согласно основному тождеству: $b = c$.

Два равенства, очевидных из определения логарифма:

$\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1.$

Логарифм произведения, частного от деления, степени и корня

Приведём сводку формул в предположении, что все значения положительны:

	Формула	Пример
Произведение	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \mathrm{l}$	$\log_3(243) = \log_3(9 \cdot 27) = \log_3(9) + \log_3(2$
Частное от деления	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) -$	$\lg\left(\frac{1}{1000}\right) = \lg(1) - \lg(1000) = 0 - 3 = -$
Степень	$\log_a(x^p) = p\log_a(x)$	$\log_2(64) = \log_2(2^6) = 6\log_2(2) = 6$
Корень	$\log_a \sqrt[p]{x} = \frac{\log_a(x)}{p}$	$\lg\sqrt{1000} = \frac{1}{2}\lg 1000 = \frac{3}{2} = 1.5$

Замена основания логарифма

Логарифм $\log_a b$ по основанию a можно преобразовать в логарифм по другому основанию c:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Следствие (при $b = c$) — перестановка основания и логарифмируемого выражения:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Десятичный логарифм

Логарифмы по основанию 10 (обозначение: $\lg x$) до изобретения калькуляторов широко применялись для вычислений. Они обладают преимуществом перед логарифмами с иным основанием: целую часть $[\lg x]$ логарифма числа x легко определить:

- Если $x \geqslant 1$, то $[\lg x]$ на 1 меньше числа цифр в целой части числа x. Например, сразу очевидно, что $\lg 345$ находится в промежутке $(2, 3)$.
- Если $0 < x < 1$, то ближайшее к $\lg x$ целое в меньшую сторону равно общему числу нулей в x перед первой ненулевой цифрой (включая ноль перед запятой), взятому со знаком минус. Например, $\lg 0{,}0014$ находится в интервале $(-3, -2)$.

Кроме того, при переносе десятичной запятой в числе на n разрядов значение десятичного логарифма этого числа изменяется на n. Например, $\lg 8314{,}63 = \lg 8{,}31463 + 3$. Отсюда следует, что для вычисления десятичных логарифмов достаточно составить таблицу логарифмов для чисел в диапазоне от 1до 10.

Связь с натуральным логарифмом:

$$\ln x \approx 2{,}30259\ \lg x, \quad \ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \ln 10 \cdot \lg x = (2{,}30259\ldots) \lg x$$

$$\lg x \approx 0{,}43429\ \ln x, \quad \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \lg e \cdot \ln x = (0{,}43429\ldots) \ln x$$

Поскольку применение логарифмов для расчётов с появлением вычислительной техники почти прекратилось, в наши дни десятичный логарифм в значительной степени вытеснен натуральным[16]. Он сохраняется в основном в тех математических моделях, где исторически укоренился — например, при построении логарифмических шкал.

Другие тождества и свойства

Если выражения для основания логарифма и для логарифмируемого выражения содержат возведение в степень, для упрощения можно применить следующее тождество:

$$\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \log_a b$$

Это тождество сразу получается, если в логарифме слева заменить основание a^q на a по вышеприведённой формуле замены основания.

Следствия:

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b; \quad \log_{\sqrt[n]{a}} b = n \log_a b; \quad \log_{a^k} b^k = \log_a b$$

Ещё одно полезное тождество:

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$$

Для его доказательства заметим, что логарифмы левой и правой частей по основанию a совпадают (равны $\log_a b \cdot \log_a c$), а тогда, согласно следствию из основного логарифмического тождества, левая и правая части тождественно равны.

Преобразования числовых логарифмических выражений

1. Найдите значение выражения

$$(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$$

Решение.

Выполним преобразования:

$$(\log_2 16) \cdot (\log_6 36) = 4 \cdot 2 = 8.$$

Ответ: 8.

2. Найдите значение выражения

$$7 \cdot 5^{\log_5 4}$$

Решение.

Выполним преобразования:

$$7 \cdot 5^{\log_5 4} = 7 \cdot 4 = 28.$$

Ответ: 28.

3. Найдите значение выражения

$$36^{\log_6 5}$$

Решение.

Выполним преобразования:

$$36^{\log_6 5} = (6^{\log_6 5})^2 = 25$$

Ответ: 25.

4. Найдите значение выражения

$$\log_{0,25} 2$$

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_{0,25} 2 = \log_{2^{-2}} 2 = -\frac{1}{2} \log_2 2 = -0,5.$$

Ответ: −0,5.

5. Найдите значение выражения

$$\log_4 8.$$

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2} \log_2 2 = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

6. Найдите значение выражения

$$\log_5 60 - \log_5 12.$$

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_5 60 - \log_5 12 = \log_5 \frac{60}{12} = \log_5 5 = 1.$$

О т в е т: 1.

7. Найдите значение выражения

$\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_5 0,2 + \log_{0,5} 4 = \log_5 \frac{1}{5} + \log_{1/2} 2^2 = -1 - 2 = -3.$$

О т в е т: −3.

8. Найдите значение выражения

$\log_{0,3} 10 - \log_{0,3} 3$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\log_{0,3} 10 - \log_{0,3} 3 = \log_{0,3} \frac{10}{3} = -\log_{0,3} \frac{3}{10} = -\log_{0,3} 0,3 = -1.$$