Занятие №39

Уважаемые курсанты, вам был отправлен на сайт материал по **Тригонометрическим функциям**, а теперь **Степенные функции.** Сделать конспект и приготовиться отвечать на конференции. В Разделе 3 прочитаете-какие функции будем изучать. Пока тригонометрические и степенные. Частично эти функции были в школьном материале.

Раздел 3. Функции, их свойства и графики
Функции. Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций, заданных различными способами. Свойства функции. Монотонность, четность, нечетность, ограниченность, периодичность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума. Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Арифметические операции над функциями. Сложная функция (композиция). Понятие о непрерывности функции. Обратные функции. Область определения и область значений обратной функции. График обратной функции.
Определения функций, их свойства и графики. Преобразования графиков. Параллельный перенос, симметрия относительно осей координат и симметрия относительно начала координат, симметрия относительно прямой y = x, растяжение и сжатие вдоль осей координат.

Знание **основных элементарных функций, их свойств и графиков** не менее важно, чем знание таблицы умножения. Они как фундамент, на них все основано, из них все строится и к ним все сводится.

В этой статье мы перечислим все основные элементарные функции, приведем их графики и дадим без вывода и доказательств **свойства основных элементарных функций** по схеме:

- область определения функции;
- поведение функции на границах области определения, вертикальные асимптоты (при необходимости смотрите статью классификация точек разрыва функции);
- четность и нечетность;
- область значений функции;
- промежутки возрастания и убывания, точки экстремума;
- промежутки выпуклости (выпуклости вверх) и вогнутости (выпуклости вниз), точки перегиба (при необходимости смотрите статью выпуклость функции, направление выпуклости, точки перегиба, условия выпуклости и перегиба);
- наклонные и горизонтальные асимптоты;
- особые точки функций;
- особые свойства некоторых функций (например, наименьший положительный период у тригонометрических функций).

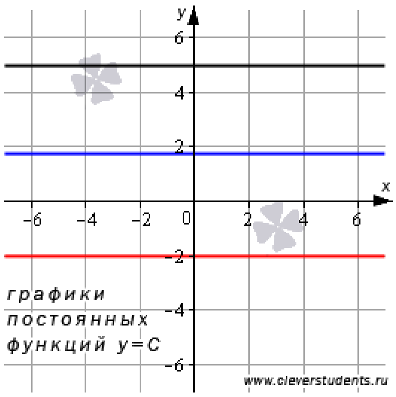
Основными элементарными функциями являются: постоянная функция (константа), корень *n*-ой степени, степенная функция, показательная, логарифмическая функция, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

- Постоянная функция (константа), ее график и свойства. $y = C$
- Корень *n*-ой степени, свойства и график.
- Степенная функция, ее график и свойства. $y = x^a$
- Показательная функция, свойства, график. $y = a^x$
- Логарифмическая функция, ее свойства, графическая иллюстрация. $y = \log_a(x)$
- Свойства и графики тригонометрических функций. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$
- Обратные тригонометрические функции (аркфункции), их свойства и графики. $y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx$

Постоянная функция.

Постоянная функция задается на множестве всех действительных чисел формулой $y = C$, где *C* – некоторое действительное число. Постоянная функция ставит в соответствие каждому действительному значению независимой переменной *x* одно и то же значение зависимой переменной *y* – значение *C*. Постоянную функцию также называют константой.

Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами *(0,C)*. Для примера покажем графики постоянных функций *y=5*, *y=-2* и $y = \sqrt{3}$, которым на рисунке, приведенном ниже, отвечают черная, красная и синяя прямые соответственно.



Свойства постоянной функции.

- Область определения: все множество действительных чисел.
- Постоянная функция является четной.
- Область значений: множество, состоящее из единственного числа *C*.
- Постоянная функция невозрастающая и неубывающая (на то она и постоянная).

- Говорить о выпуклости и вогнутости постоянной не имеет смысла.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точку *(0,C)* координатной плоскости.

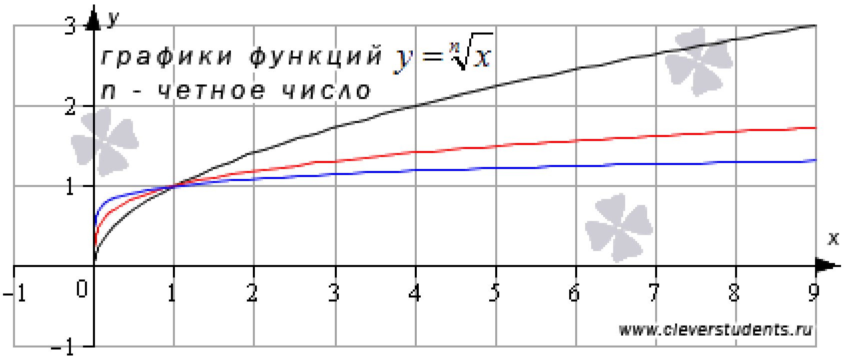
Корень *n*-ой степени.

Рассмотрим основную элементарную функцию, которая задается формулой $y = \sqrt[n]{x}$, где n – натуральное число, большее единицы.

Корень n-ой степени, n - четное число.

Начнем с функции корень n-ой степени при четных значениях показателя корня n.

Для примера приведем рисунок с изображениями графиков функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ и $y = \sqrt[8]{x}$, им соответствуют черная, красная и синяя линии.



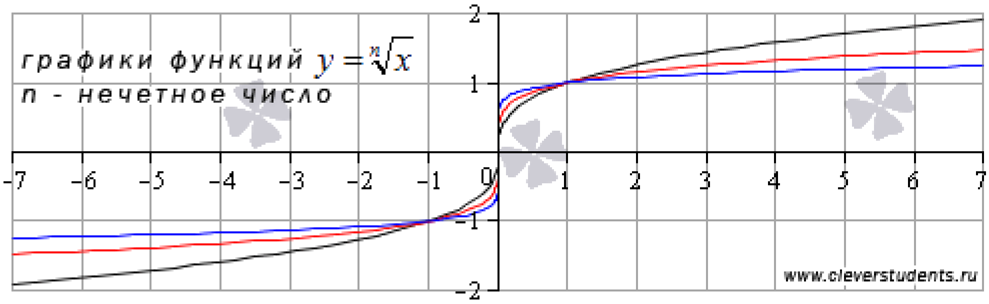
Аналогичный вид имеют графики функций корень четной степени при других значениях показателя.

Свойства функции корень *n*-ой степени при чётных *n*.

- Область определения: множество всех неотрицательных действительных чисел $[0,+\infty)$.
- При *x=0* функция $y = \sqrt[n]{x}$ принимает значение, равное нулю.
- Эта функция общего вида (не является четной или нечетной).
- Область значений функции: $[0,+\infty)$.
- Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при четных показателях корня возрастает на всей области определения.
- Эта функция имеет выпуклость, направленную вверх, на всей области определения, точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- График функции корень n-ой степени при четных n проходит через точки *(0,0)* и*(1,1)*.

Корень n-ой степени, n - нечетное число.

Функция корень n-ой степени с нечетным показателем корня n определена на всем множестве действительных чисел. Для примера приведем графики функций $y = \sqrt[3]{x},\ y = \sqrt[5]{x}$ и $y = \sqrt[9]{x}$, им соответствуют черная, красная и синяя кривые.



При других нечетных значениях показателя корня графики функции $y = \sqrt[n]{x}$ будут иметь схожий вид.

Свойства функции корень *n*-ой степени при нечетных *n*.

- Область определения: множество всех действительных чисел.
- Эта функция нечетная.
- Область значений функции: множество всех действительных чисел.
- Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечетных показателях корня возрастает на всей области определения.
- Эта функция вогнутая на промежутке $(-\infty, 0]$ и выпуклая на промежутке $[0, +\infty)$, точка с координатами *(0,0)* – точка перегиба.
- Асимптот нет.
- График функции корень *n*-ой степени при нечетных *n* проходит через точки*(-1,-1)*, *(0,0)* и *(1,1)*.

Степенная функция

Степенная функция задается формулой вида $y = x^{\alpha}$.

Рассмотрим вид графиков степенной функции и свойства степенной функции в зависимости от значения показателя степени.

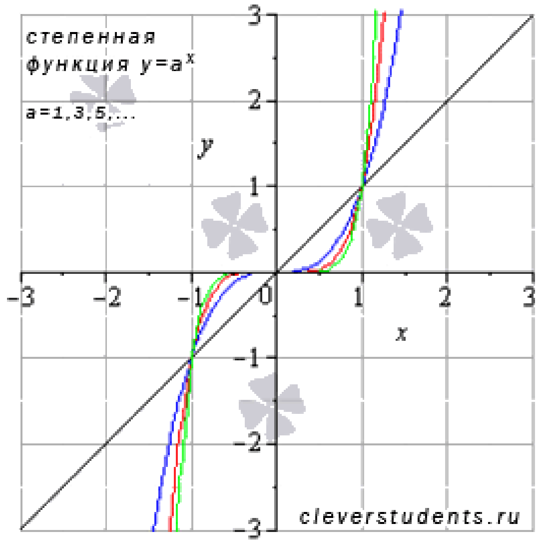
Начнем со степенной функции с целым показателем *a*. В этом случае вид графиков степенных функций и свойства функций зависят от четности или нечетности показателя степени, а также от его знака. Поэтому сначала рассмотрим степенные функции $y = x^{\alpha}$ при нечетных положительных значениях показателя *a*, далее - при четных положительных, далее - при нечетных отрицательных показателях степени, и, наконец, при четных отрицательных *a*.

Свойства степенных функций с дробными и иррациональными показателями (как и вид графиков таких степенных функций) зависят от значения показателя *a*. Их будем рассматривать, во-первых, при *a* от нуля до единицы, во-вторых, при *a* больших единицы, в-третьих, при *a* от минус единицы до нуля, в-четвертых, при *a* меньших минус единицы.

В заключении этого пункта для полноты картины опишем степенную функцию с нулевым показателем.

Степенная функция с нечетным положительным показателем.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^a$ при нечетном положительном показателе степени, то есть, при *a=1,3,5,…*.
На рисунке ниже приведены графики степенных функций $y = x$ – черная линия, $y = x^3$ – синяя линия, $y = x^5$ – красная линия, $y = x^7$ – зеленая линия. При *a=1*имеем *линейную функцию y=x*.



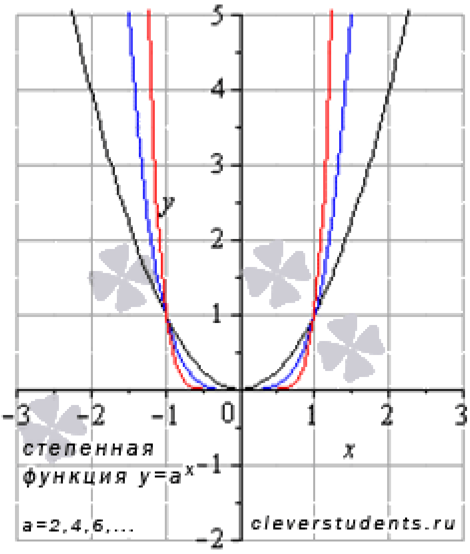
Свойства степенной функции с нечетным положительным показателем.

- Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (-\infty; 0]$ и вогнутая при $x \in [0; +\infty)$ (кроме линейной функции).
- Точка *(0;0)* является точкой перегиба (кроме линейной функции).
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(-1;-1), (0;0), (1;1)*.

Степенная функция с четным положительным показателем.

Рассмотрим степенную функцию $y = x^\alpha$ с четным положительным показателем степени, то есть, при а=*2,4,6,…*.

В качестве примера приведем графики степенных функций $y = x^2$ – черная линия, $y = x^4$ – синяя линия, $y = x^8$ – красная линия. При *a=2* имеем квадратичную функцию, графиком которой является *квадратичная парабола*.

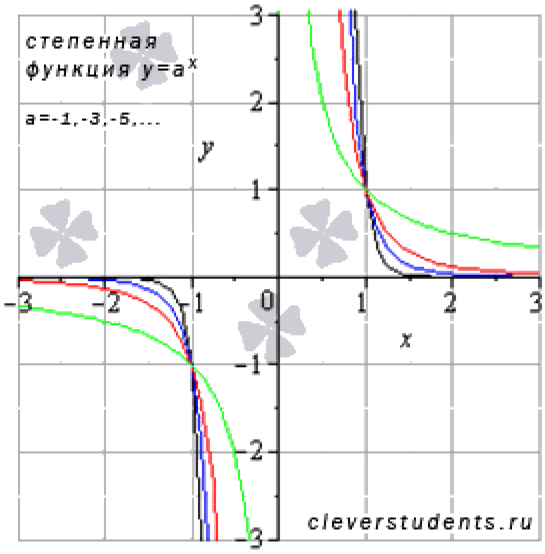


Свойства степенной функции с четным положительным показателем.

- Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in [0; +\infty)$.
- Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in [0; +\infty)$, убывает при $x \in (-\infty; 0]$.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки *(-1;1), (0;0), (1;1)*.

Степенная функция с нечетным отрицательным показателем.

Посмотрите на графики степенной функции $y = x^{\alpha}$ при нечетных отрицательных значениях показателя степени, то есть, при *a=-1,-3,-5,…*.



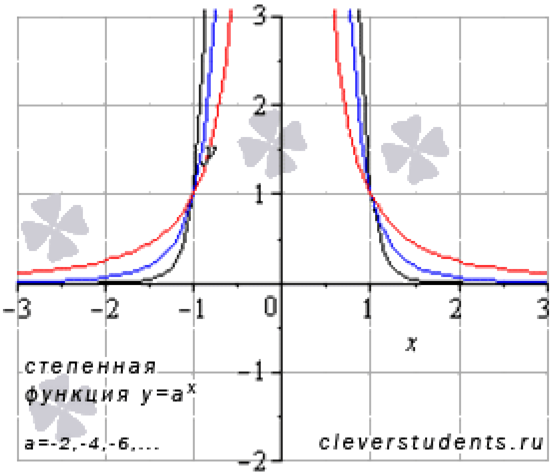
На рисунке в качестве примеров показаны графики степенных функций $y = x^{-9}$ – черная линия, $y = x^{-5}$ – синяя линия, $y = x^{-3}$ – красная линия, $y = x^{-1}$ – зеленая линия. При *a=-1* имеем *обратную пропорциональность*, графиком которой является *гипербола*.

Свойства степенной функции с нечетным отрицательным показателем.

- Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
  При *x=0* имеем разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x \to 0-0} x^a = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0+0} x^a = +\infty$ при *a=-1,-3,-5,…*. Следовательно, прямая *x=0* является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция убывает при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (-\infty; 0)$ и вогнутая при $x \in (0; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая *y = 0*, так как
  $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^a}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \to \infty} (x^a - kx) = 0 \quad \Rightarrow$$
  $$y = kx + b = 0$$
  при *a=-1,-3,-5,…*.
- Функция проходит через точки *(-1;-1), (1;1)*.

Степенная функция с четным отрицательным показателем.

Перейдем к степенной функции $y = x^a$ при *a=-2,-4,-6,…*.



На рисунке изображены графики степенных функций $y = x^{-8}$ – черная линия, $y = x^{-4}$ – синяя линия, $y = x^{-2}$ – красная линия.

Свойства степенной функции с четным отрицательным показателем.

- Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
  При *x=0* имеем разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x \to 0-0} x^a = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to 0+0} x^a = +\infty$ при *a=-2,-4,-6,…*. Следовательно, прямая *x=0* является вертикальной асимптотой.

- Область значений: $y \in (0; +\infty)$.
- Функция четная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0)$, убывает при $x \in (0; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая $y=0$, так как

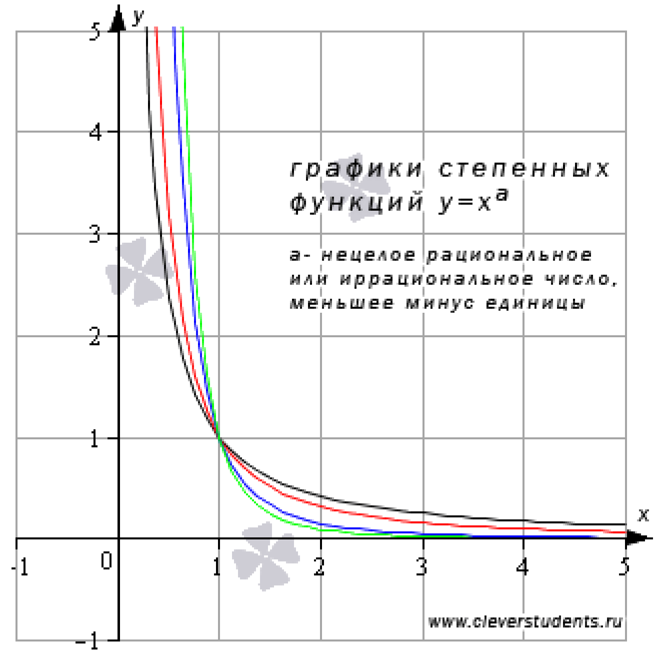
  $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^a}{x} = 0, \quad b = \lim\limits_{x \to \infty} (x^a - kx) = 0 \quad \Rightarrow$

  $y = kx + b = 0$

  при a=-2,-4,-6,….
- Функция проходит через точки *(-1;1), (1;1)*.

Степенная функция с нецелым действительным показателем, который меньше минус единицы.

Приведем примеры графиков степенных функций $y = x^{\alpha}$ при $y = x^{-\frac{5}{4}}$, $y = x^{-\frac{5}{3}}$, $y = x^{-e}$, $y = x^{-\frac{27}{4}}$, они изображены черной, красной, синей и зеленой линиями соответственно.



Свойства степенной функции с нецелым отрицательным показателем, меньшим минус единицы.

- Область определения: $x \in (0; +\infty)$.

  $\lim\limits_{x \to 0+0} x^a = +\infty$ при $a < -1$, следовательно, $x=0$ является вертикальной асимптотой.
- Область значений: $y \in (0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция убывает при $x \in (0; +\infty)$.

- Функция вогнутая при $x \in (0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая $y=0$.
- Функция проходит через точку $(1;1)$.

При $a=0$ и $x \neq 0$ имеем функцию $y = x^0 = 1$ - это прямая из которой исключена точка$(0;1)$ (выражению 0^0 условились не придавать никакого значения).