

Решение задач на тему «Однофазные цепи переменного тока. Арифметические операции с комплексными числами»

Задание:

- 1) Повторить теорию, при необходимости – законспектировать.
- 2) Разобрать примеры решения задач.
- 3) Решить задачи по образцу. Задачи решать в тетради для практических работ.

Краткое теоретическое содержание:

1. Сложение и вычитание (выполняется в алгебраической форме)

Если число представлено в показательной форме, то его надо перевести в алгебраическую.

При выполнении сложения (вычитания) складываются действительные и мнимые части комплексных чисел.

$$\dot{F}_1 = F_1 e^{j\varphi_1} = x_1 + jy_1$$

$$\dot{F}_2 = F_2 e^{j\varphi_2} = x_2 + jy_2$$

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \dot{F}_1 \pm \dot{F}_2 = F_1 e^{j\varphi_1} \pm F_2 e^{j\varphi_2} = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2) = \\ &= x + jy\end{aligned}$$

2. Умножение (удобнее выполнять в показательной форме)

Если число представлено в алгебраической форме, то его надо перевести в показательную:

$$\dot{F} = \dot{F}_1 \cdot \dot{F}_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = F_1 e^{j\varphi_1} \cdot F_2 e^{j\varphi_2} = F_1 \cdot F_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = F e^{j\varphi}$$

В алгебраической форме умножение выполняется по правилам перемножения многочленов, учитывая, что $j \cdot j = -1$

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \dot{F}_1 \cdot \dot{F}_2 = (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot jy_2 + jy_1 \cdot x_2 + jy_1 \cdot jy_2 = \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)\end{aligned}$$

3. Деление (выполняется в показательной форме)

Если число представлено в алгебраической форме, то его надо перевести в показательную:

$$\dot{F} = \frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2} = \frac{(x_1 + jy_1)}{(x_2 + jy_2)} = \frac{F_1 e^{j\varphi_1}}{F_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{F_1}{F_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = F e^{j\varphi}$$

4. Возведение в степень (выполняется в показательной форме)

$$F_1^m = (x_1 + jy_1)^m = (F_1 e^{j\varphi_1})^m = F_1^m \cdot e^{jm\varphi_1} = F e^{j\varphi}$$

Пример 1. Сложение и вычитание комплексных величин:

1.1

$$5e^{j53.13^\circ} + 2e^{90^\circ} = 5 \cos 53.13^\circ + j \cdot 5 \sin 53.13^\circ + 2 \cos 90^\circ + j \cdot 2 \sin 90^\circ = \\ = 3 + j4 + 0 + j2 = 3 + j6$$

1.2

$$10e^{j\frac{\pi}{4}} - 6e^{j\pi} = 10 \cos \frac{\pi}{4} + j \cdot 10 \sin \frac{\pi}{4} - 6 \cos \pi - j \cdot 6 \sin \pi = 7.1 + j7.1 + 6 - j0 = \\ = 13.1 + j7.1$$

Пример 2. Умножение

2.1

$$(1 + j1.73)(7.07 - j7.07) = \sqrt{1^2 + 1.73^2} e^{\operatorname{arctg} \frac{1.73}{1}} \cdot \sqrt{7.07^2 + (-7.07)^2} e^{\operatorname{arctg} \left(\frac{-7.07}{7.07} \right)} = \\ = 2e^{j60^\circ} \cdot 10e^{-j45^\circ} = 20e^{15^\circ}$$

2.2

$$(1 + j1.73)(7.07 - j7.07) = 1 \cdot 7.07 - 1 \cdot j7.07 + j1.73 \cdot 7.07 - j1.73 \cdot j7.07 = \\ = 7.07 - j7.07 + j12.23 + 12.23 = 19.3 + j5.16 = \\ = \sqrt{19.3^2 + 5.16^2} \cdot e^{j \operatorname{arctg} \frac{5.16}{19.3}} \approx 20e^{j15^\circ}$$

Пример 3. Деление

$$\frac{7.07 + j7.07}{1 + j1.73} = \frac{\sqrt{7.07^2 + 7.07^2} e^{\operatorname{arctg} \frac{7.07}{7.07}}}{\sqrt{1^2 + 1.73^2} e^{\operatorname{arctg} \frac{1.73}{1}}} = \frac{10e^{j45^\circ}}{2e^{j60^\circ}} = 5e^{-j15^\circ}$$

Пример 4. Возведение в степень

$$(5 + j3)^4 = \left(\sqrt{5^2 + 3^2} \cdot e^{j \operatorname{arctg} \frac{3}{5}} \right)^4 = (5.83e^{j30.96^\circ})^4 = 5.83^4 \cdot e^{4 \cdot j30.96^\circ} \approx 1155e^{j123.84^\circ}$$

Некоторые соотношения

$j = \sqrt{-1}$	$j^2 = -1$	$j^3 = -j$	$\frac{1}{j} = -j$
$j = e^{j90^\circ}$	$-j = e^{-j90^\circ}$	$e^{j0^\circ} = 1$	$e^{j180^\circ} = -1$

Задача 1: Вычислить следующие выражения

а) $2e^{j30^\circ} + 8e^{j10^\circ}$

б) $27e^{-j15} - 13e^{j45}$

в) $(3 + j4) \cdot (5 - j5)$

г) $\frac{(7 - j3.87)}{(8 + j4.12)}$

д) $(9 - j7.94)^2$