Занятие 10-11

Тема. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Общее и частное решение. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.

Дифференциальные уравнения связывают между собой неизвестную функцию (или несколько таких функций) с её производными. С простейшими уравнениями такого типа мы уже фактически сталкивались. И решали дифференциальные уравнения. В какой же ситуации это происходило? Оказывается, когда мы с вами находили первообразную для некоторой функции, то мы и решали диф.уравнение.

Разберемся на примере. Мы знаем, что $(x^2)' = 2x$. Запишем это равенство в виде или $y' = 2x$ (а можно и так $y' - 2x = 0$). Мы теперь уже знаем, что производную записывают в виде $\frac{dy}{dx} = 2x$. Домножим обе части равенства на dx. Получим dy=2xdx. А теперь проинтегрируем обе части равенства.

$\int dy = \int 2xdx$.

$y = x^2 + C$

Находя первообразную для 2x, мы решали дифференциальное уравнение.

Итак, одна из задач, которая приводит к диф.уравнению – это нахождение первообразной.

Вторая задача.

Пусть тело движется на плоскости и известен закон изменения его скорости v(t)= 2t+3 . Как восстановить закон изменения расстояния тела?

Имеем $S'(t)=v(t)=2t+3$ $\rightarrow \frac{ds}{dt} = 2t + 3 \rightarrow ds=(2t+3)dt \rightarrow \int ds = \int (2t+3)dt$ $\rightarrow S(t) = t^2 + 3t + C.$

Мы получили общее решение дифференциального уравнения. Чтобы получить частное решение, необходимо знать дополнительные условия, например, расстояние в момент времени t: S=20 при t=3. Подставим эти данные в последнее уравнение. $20=3^2+3\cdot 3 + C \rightarrow C = 2.$ $S(t) = t^2 + 3t + 2.$ Это частное решение.

Итак, теория.

Обыкновенным *дифференциальным уравнением n –го порядка* называется уравнение вида

$F\,(x, y(x), y\,'(x), y\,''(x), \ \ldots\ , y^{(n)}(x)) = 0,$

Где F — некоторая функция, зависящая от x, y и производных разного порядка. Число n называется порядком уравнения.

Функция $y(x)$ называется *решением* (или *интегралом*) дифференциального уравнения, если она n раз дифференцируема и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия.

Любое конкретное решение уравнения n –го порядка называется *частным решением*.

Общим решением дифференциального уравнения

$F(x, y(x), y\,'(x), y\,''(x), \ \ldots\ ,y^{(n)}(x)) = 0$

называется функция $y = \Phi(x,\ C_1, C_2, \ldots , C_n)$,

содержащая некоторые постоянные (параметры) $C_1, C_2, \ldots , C_n$.

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме: $f(x, y) = 0$ или $G(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$. Такие неявно заданные решения называются *частным интегралом* или *общим интегралом* уравнения.

Пример 1.

Решить диф.уравнение первого порядка.

$xy' = y$

Здесь нам пригодится обозначение производной в более громоздкой форме: $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{xdy}{dx} = y.$$

Разделим переменные, то есть сделаем так, чтобы с одной стороны равенства были x, а с другой y.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные: $\ln|y| = \ln|x| + C$

Константу C достаточно записать один раз *(т.к. константа + константа всё равно равна другой константе)*. В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решённым. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено *в неявном* виде. Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Ответ в такой форме вполне приемлем, но нет ли варианта получше? Давайте попытаемся получить **общее решение**.

Пожалуйста, **запомните первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: *если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях (но далеко не всегда!) целесообразно записать тоже под логарифмом.*

То есть, **ВМЕСТО** записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек». Используем **свойство логарифмов** $\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|$. В данном случае: $\ln|y| = \ln|Cx|$

Теперь логарифмы и **модули** можно убрать: $y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Ответ: общее решение: $y = Cx$, где $C = const$.

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение $y = Cx$ и дифференцируем его: $y' = (Cx)' = C$.

После чего подставляем $y = Cx$ и производную $y' = C$ в исходное уравнение $xy' = y$:

$x \cdot C = Cx$

$Cx = Cx$ – получено верное равенство, значит, общее решение $y = Cx$ удовлетворяет уравнению $xy' = y$, что и требовалось проверить.

Пример 2. $\frac{y'}{\cos x} = y \rightarrow \frac{dy}{\cos x dx} = y \rightarrow \frac{dy}{y} = \cos x\, dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cos x\, dx \rightarrow ln|y| = \sin x + C$

Мы получили решение в неявном виде, этого достаточно. Но можно и выразить y.
y=$e^{\sin x+C}$

<u>Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.</u>
В чём отличие однородных дифференциальных уравнений от других типов ДУ? Это проще всего сразу же пояснить на конкретном примере.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$
В первую очередь необходимо проверить, а нельзя ли разделить переменные? Обычно такой анализ проводят мысленно или пытаются разделить переменные на черновике.
В данном примере **переменные разделить нельзя,** об этом говорит наличие множителя $e^{\frac{y}{x}}$.
Как понять, **является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:
В исходное уравнение: **вместо** x подставляем λx, **вместо** y подставляем λy, **производную не трогаем**:
$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$
Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.
Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени: $\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$
Теперь в правой части выносим лямбду за скобки: $\lambda x \cdot y' = \lambda (y - x e^{\frac{y}{x}})$
и обе части делим на эту самую лямбду: $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

В результате **все** лямбды исчезли, и мы получили исходное уравнение.
Вывод: Данное уравнение является однородным
Решение однородного дифференциального уравнения.

Потребуется осуществить стандартную замену переменной.

Функцию «игрек» следует **заменить произведением** некоторой функции t *(тоже зависящей от «икс»)* и «икса»:

$y = t(x) \cdot x$, почти всегда пишут коротко: $y = tx$

Выясняем, во что превратится производная y' при такой замене, используем правило дифференцирования произведения. Если $y = tx$, то: $y' = (tx)' = (t)'x + t(x)' = t'x + t$

Подставляем $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

$x(t'x + t) = tx - xe^{\frac{tx}{x}}$

После данной замены и проведенных упрощений мы гарантировано получим уравнение с разделяющимися переменными.

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$x(t'x + t) = x(t - e^t)$

$t'x + t = t - e^t$

$t'x = -e^t$

Далее решаем **уравнение с разделяющимися переменными**.

Поскольку t – это функция, зависящая от «икс», то её производную можно записать стандартной дробью: $t' = \frac{dt}{dx}$.

Таким образом:

$x\frac{dt}{dx} = -e^t$

Разделяем переменные, при этом в левой части нужно собрать только «тэ», а в правой части – только «иксы»:

$-e^{-t}dt = \frac{dx}{x}$

Переменные разделены, интегрируем:

$-\int e^{-t}dt = \int \frac{dx}{x}$

$e^{-t} = \ln|x| + \ln|C|$

После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести *обратную замену*, она тоже стандартна и единственна:

Если $y = tx$, то $t = \frac{y}{x}$

В данном случае: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$

В 18-19 случаях из 20 решение однородного уравнения записывают в виде общего интеграла.

Ответ: общий интеграл: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$, где $C = const$

Почему почти всегда ответ однородного уравнения даётся в виде общего интеграла?

В большинстве случаев невозможно выразить «игрек» в явном виде (получить общее решение), а если и возможно, то чаще всего общее решение получается громоздким и корявым.

Пример 4.

Решить дифференциальное уравнение (2x+y)dx−xdy=0.

1. Проверим, можно ли разделить переменные. Нельзя.
2. Проверим, является ли уравнение однородным. $(2\lambda x+\lambda y)dx - \lambda x dy = 0 \to \lambda(2x + y)dx - \lambda x dy = 0 \to \lambda\big((2x + y)dx - $ $-x dy\big) = 0$. Разделим на λ обе части уравнения. Получим исходное исходное уравнение.
3. y=tx $\to y' = t'x + x't = t'x + t = \frac{dy}{dx}$. Зачем нужен последний шаг? Дело в том, что в нашем уравнении нет y'. Мы можем его получить, разделив уравнение на dx: $2x+y - x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. (Примечание: уравнение $2x+y - x \cdot y' = 0$ и исходное уравнение – это одно и то же уравнение)
4. Подставляем: $2x+tx - x(t'x + t) = 0$.
   Раскрываем скобки и преобразовываем: $2x+tx - xt'x - xt = 0. \to$
   $2x - x^2t' = 0 \to 2x - x^2\frac{dt}{dx} = 0$.
5. Разделяем переменные: $2x = x^2\frac{dt}{dx}$; умножим обе части на $\frac{dx}{x^2} \to \frac{2xdx}{x^2} =$ $dt \to$
   $\frac{2dx}{x} = dt$. Получили уравнение с разделенными переменными. ($x \neq 0$)
6. Интегрируем обе части.
   $\int \frac{2dx}{x} = \int dt$
   $2ln|x| = t$ или $t = 2\ln|x| + C$
7. Возвращаемся к исходным переменным. y=tx, $t=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = 2ln|x| + C$$

$y = x(2ln|x| + C)$

<u>Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами</u>**.**

В дифференциальное уравнение второго порядка обязательно входит вторая производная y'' и не входят производные более высоких порядков:
$F(x, y, y', y'') = 0$

Самое примитивное дифференциальное уравнение второго порядка выглядит так: $y'' = 0$

Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:
$y'' + py' + qy = 0$, где p и q – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.

Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:
$y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q – константы, а $f(x)$ – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция $f(x)$ может быть числом, *отличным от нуля*.

Рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:
$y'' + py' + qy = 0$

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое характеристическое уравнение:
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:
вместо второй производной записываем λ^2;
вместо первой производной записываем просто «лямбду»;
вместо функции y ничего не записываем.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ – это обычное квадратное уравнение, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий. На практике мы будем использовать готовые формулы.

1) Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня -

общее решение однородного уравнения выглядит так:
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1, C_2 – константы.

2) Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет два **равных** действительных корня $\lambda_1 = \lambda_2$ (дискриминант $D = 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид: $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$, где C_1, C_2 – константы.
3) Если характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ имеет **сопряженные** комплексные корни $\lambda_1 = \alpha - \beta i$, $\lambda_2 = \alpha + \beta i$ (дискриминант $D < 0$), то общее решение однородного уравнения принимает вид: $y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где C_1, C_2 – константы.
   Примечание: Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

Пример 5.

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$

$\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$, $\lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

Получены два различных действительных корня. Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 6

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$

Решение: составим и решим характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного умножения:

$(\lambda - 3)^2 = 0$

(конечно, формулу нужно увидеть, это приходит с опытом решения)

Получены два кратных действительных корня $\lambda_{1,2} = 3$

Ответ: общее решение: $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$, *где* $C_1, C_2 - const$

Пример 5

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка
$y'' - 2y' + 10y = 0$

Решение: Составим и решим характеристическое уравнение:
$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$
$D = 4 - 40 = -36$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$ – получены сопряженные комплексные корни

Ответ: общее решение: $y = e^x(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x),\ \textit{где}\ \ C_1, C_2 - const$

Внимательно проработайте рассмотренные примеры. Выпишите все формулы в тетрадь для справочных материалов.