

## Занятие 7

Тема.

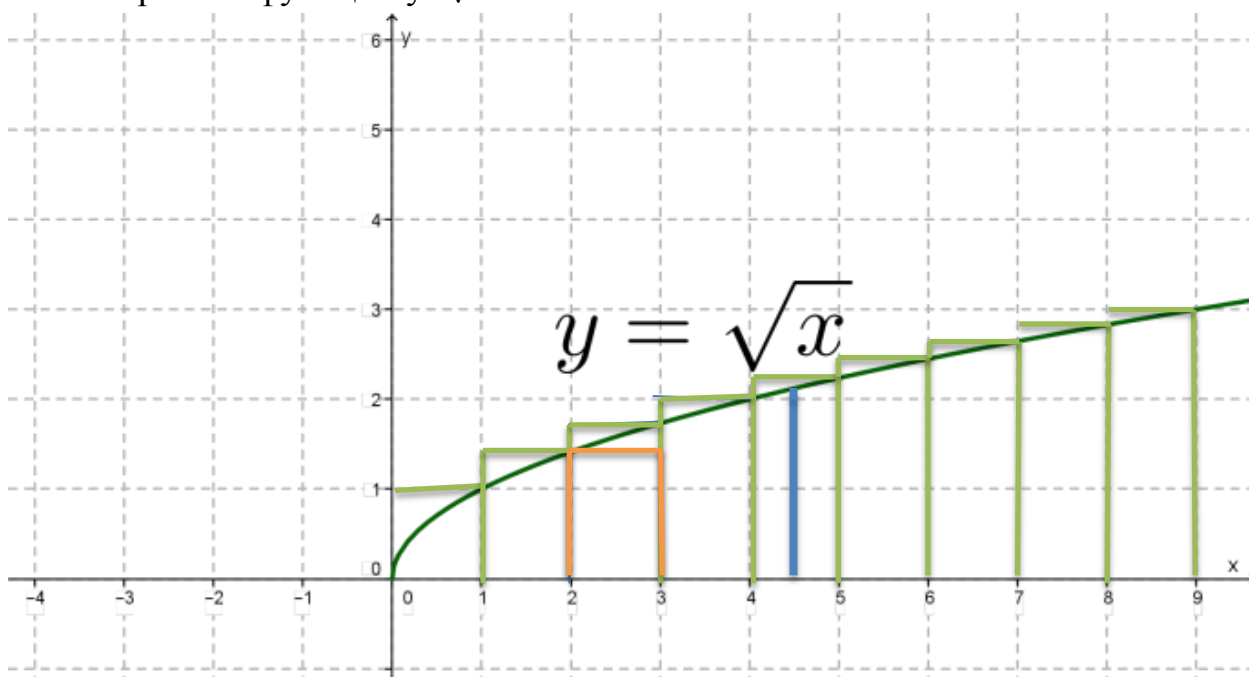
1 час. Численное интегрирование. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций, формуле Симпсона.

2 час. Применение основных численных методов для решения прикладных задач: вычисление интегралов различными методами.

### Вычисление интегралов по формулам прямоугольников

Суть этого метода заключается в том, что искомая площадь разбивается на прямоугольники, причем, чем больше прямоугольников, тем точнее будет вычисление.

Рассмотрим на функции  $y = \sqrt{x}$ .



Вычислить  $\int_4^9 \sqrt{x} dx$  методом прямоугольников.

1. Возьмем шаг разбиения  $a=1$ . Понятно, что при более мелком шаге точность вычисления будет выше. Если вы внимательно приглядитесь, то увидите, что при таком расположении прямоугольников площадь фигуры будет завышена. Выбор точек осуществляется на правой границе данных элементарных отрезков. Поэтому называется метод правых прямоугольников.
2. Вычислим сумму площадей прямоугольников.  
 $S = 1 \cdot \sqrt{5} + 1 \cdot \sqrt{6} + 1 \cdot \sqrt{7} + 1 \cdot \sqrt{8} + 1 \cdot \sqrt{9}$ . Как вы понимаете, 1 – это размер основания прямоугольника, а  $\sqrt{n}$  – высоты прямоугольников. Воспользуемся калькулятором:  $2,236 + 2,449 + 2,646 + 2,828 + 3 = 13,159$ .

3. Если бы выбор точек осуществлялся на левой границе отрезка (чтобы не загромождать чертеж на отрезке от 4 до 9, один я начертила красным цветом левее), мы бы получили сумму меньше, а именно:

$$S = 1 \cdot \sqrt{4} + 1 \cdot \sqrt{5} + 1 \cdot \sqrt{6} + 1 \cdot \sqrt{7} + 1 \cdot \sqrt{8} = 12,159. \text{ Обратите внимание, левый прямоугольник имеет высоту 4 (по левой точке отрезка). И т.д.}$$

4. Конечно же, будет точнее, если высоту прямоугольника мы будем брать не на концах отрезка, а посередине. Такая высота показана на отрезке от 4 до 5. Посчитаем площадь в этом случае (единицу – ширину прямоугольника уже писать не буду).

$$S = \sqrt{4,5} + \sqrt{5,5} + \sqrt{6,5} + \sqrt{7,5} + \sqrt{8,5} = 2,121 + 2,345 + 2,55 + 2,739 + 2,915 = 12,67. \text{ Это значение находится между двумя предыдущими.}$$

5. И наконец, посчитаем интеграл обычным способом и сравним с предыдущими числами.

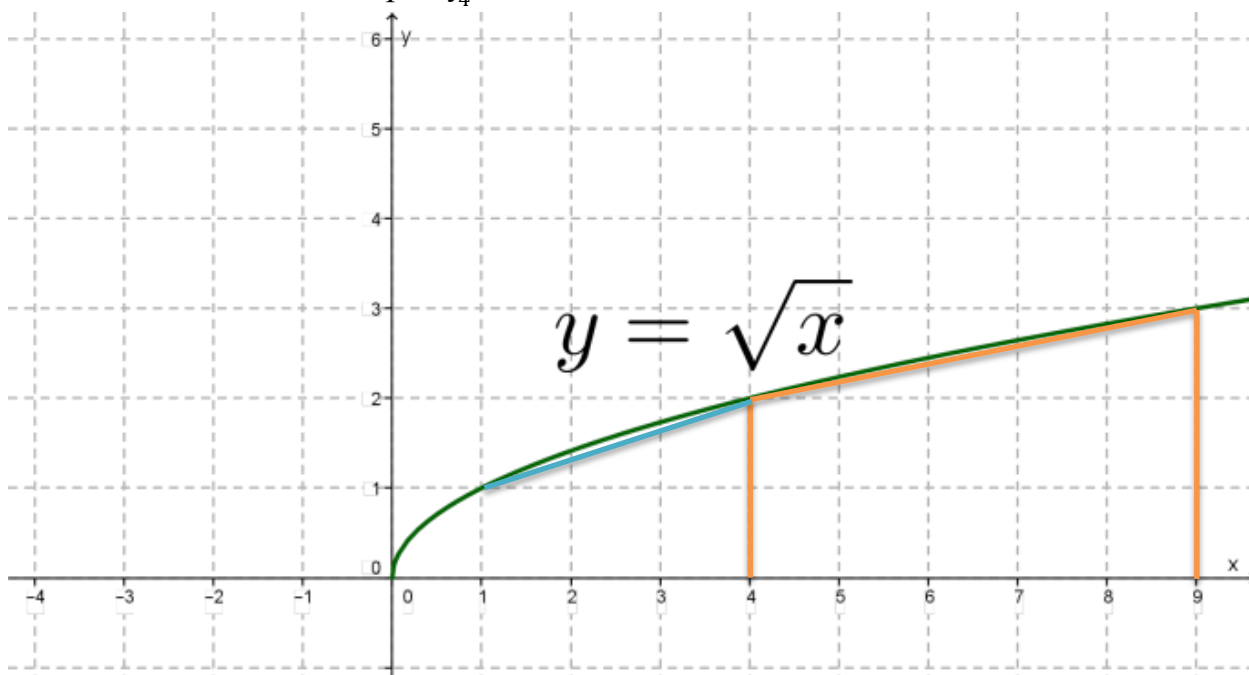
$$\int_4^9 \sqrt{x} dx = \int_4^9 x^{\frac{1}{2}} dx = \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_4^9 = \frac{2\sqrt{x}^3}{3} \Big|_4^9 = \frac{2\sqrt{9}^3}{3} - \frac{2\sqrt{4}^3}{3} = \frac{54}{3} - \frac{16}{3} = \frac{38}{3} = 12,667.$$

Как видим, метод средних прямоугольников (п.4) дал достаточно точный результат. НО! Зачем же нам мучиться с прямоугольниками, если можно просто вычислить интеграл? Дело в том, что бывают интегралы невычисляемые.

### Вычисление интегралов по формулам трапеций.

Этот метод отличается от предыдущего тем, что разбиение происходит не на прямоугольники, а на трапеции.

Вычислим тот же интеграл  $\int_4^9 \sqrt{x} dx$

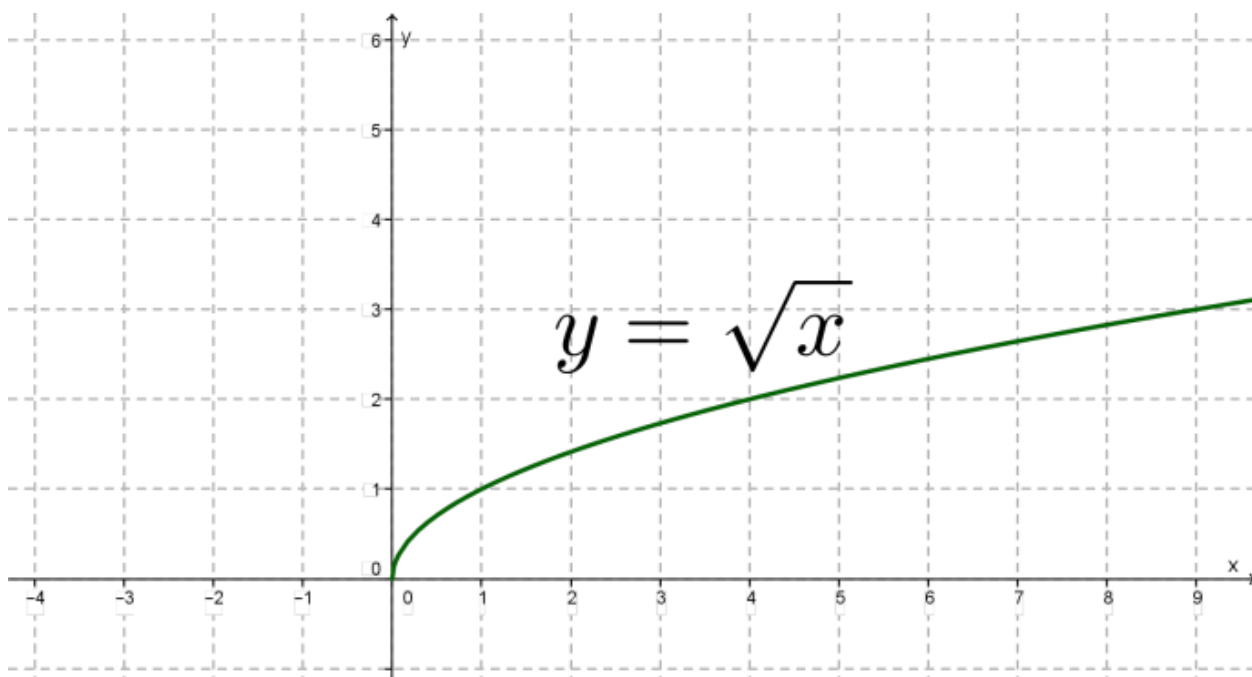


Красная линия сверху на отрезке  $[4; 9]$  практически совпадает с линией графика, поэтому большого различия в числах не должно быть.

6. Вычисляем площадь трапеции:  $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{4} + \sqrt{9}}{2} \cdot (9 - 4) = 2,5 \cdot 5 = 12,5$ .  
 (однако, все-таки меньше, чем 12,667, смотрите выше). Если вычислять площадь на отрезке  $[1; 4]$ , то погрешность будет больше. Посмотрите, какую часть фигуры мы отсекли синей линией.

Вычисление интегралов по формуле Симпсона.  $\int_a^b f(x) dx =$

$$\frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$



7. В нашем случае  $a=4$ ,  $b=9$ ,  $f(a)=\sqrt{4} = 2$ ,  $f(b)=\sqrt{9} = 3$ ,  
 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{4+9}{2}\right) = f(6,5) = 2,55$
8. Считаем:  $\int_4^9 \sqrt{x} dx = \frac{9-4}{6} (2 + 4 \cdot 2,55 + 3) = \frac{5}{6} \cdot 15,2 = 12,667$ .
9. Делаем вывод, что из всех методов вычисление интеграла по формуле Симпсона дает наиболее точный результат.

### Практическая работа №3

Цель. Проверка умения вычислять интеграл по формулам прямоугольников, трапеций, формуле Симпсона.

Задание. На основании выше изложенного материала вычислить  $\int_1^4 \sqrt{x} dx$  по формулам прямоугольников, трапеций, формуле Симпсона.

Соблюдайте нумерацию, предложенную в теоретическом материале.  
Выполнение чертежей обязательно.

Работу принести на очное занятие.