Занятие 8

Тема. Числовые ряды. Признаки сходимости. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Функциональные и степенные ряды. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Понятие о ряде Фурье

Вопрос	Ответ
1.Чем отличается ряд от последовательности? 2, 4, 6, 8, 10,12…..- последоват. $\sum_{n=1}^{\infty} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots.$	В последовательности просто перечисляются числа через запятую, а числовой ряд – это сумма членов числовой последовательности.
2.Что такое общий член числового ряда?	Это формула, по которой можно найти n-й член ряда. Например, в предыдущем ряде $a_n=2n$.
3.Что такое частичная сумма числового ряда?	Это сумма ограниченного количества членов ряда, а не бесконечного. Первая частичная сумма – сам первый член ряда. Вторая частичная сумма – это сумма первых двух членов ряда. И т.д. Например четвертая частичная сумма выше приведенного ряда S_4=2+4+6+8=20. Частичные суммы $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ образуют бесконечную последовательность частичных сумм числового ряда.
4.Пример последовательности частичных сумм числового ряда.	Для нашего ряда: 2, 6, 12, 20, 30, 42, …
5.Что такой сходящийся ряд?	если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. То есть, значения сумм не превосходят по абсолютной величине некоторое число.
6.Пример сходящегося ряда	$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$
7.Сумма сходящегося ряда?	предел последовательности его частичных сумм, то есть, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

8.Что такое расходящийся ряд?	Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **расходящимся.**
9.Пример расходящегося ряда	Сумма геометрической прогрессии со знаменателем большем, чем единица: $1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}$. *n–ая* частичная сумма определяется выражением $S_n=\frac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$, а предел частичных сумм бесконечен: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(2^n-1)=+\infty$. Здесь применили формулу суммы геометрической прогрессии.
10.Что такое гармонический числовой ряд?	Сумма вида $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ называется **гармоническим числовым рядом**. Гармонический ряд расходится. Это надо запомнить.
11.Что такое знакоположительный ряд?	Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **знакоположительным**, если все его члены положительны, то есть, $a_k>0,\quad k=1,2,\ldots$.
12.Что такое знакочередующийся ряд?	Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется **знакочередующимся**, если знаки его соседних членов различны. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot a_k$
13.Что такое знакопеременный ряд?	Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется **знакопеременным**, если он содержит бесконечное множество как

	положительных, так и отрицательных членов. Знакочередующийся числовой ряд является частным случаем знакопеременного ряда.
14.Необходимый признак сходимости*	***Теорема 1*** **(необходимый признак сходимости ряда).** Если ряд сходится, то его *n*-й член стремится к нулю при $n \to \infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. Возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например, **предела** $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$
15.Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.**	***Теорема 1*** **(признак сравнения).** ***Теорема 2*** **(признак Даламбера).**
16.Что такое абсолютная сходимость ряда.	Знакопеременный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд из абсолютных величин его членов, то есть, сходится знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert b_k \rvert$. К примеру, числовые ряды $6-3+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16},\ldots$ и $6+3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16},\ldots$ абсолютно сходятся, так как сходится ряд $6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16},\ldots$, являющийся суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
17.Что такое условная сходимость ряда.	Знакопеременный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ называется **условно сходящимся**, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert b_k \rvert$ расходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. В качестве примера условно сходящегося числового ряда можно привести ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$. Числовой

	ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right\| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, расходящийся, так как является гармоническим.
18.Что такое функциональны ряд?	Обычный **числовой ряд**, вспоминаем, состоит из чисел: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$ Все члены ряда $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ – это **ЧИСЛА**. Функциональный же ряд состоит из **ФУНКЦИЙ**. Выглядит это, например, так: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}$. Как и числовой ряд, любой функциональный ряд можно расписать в развернутом виде: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n} = \frac{\sin x}{2\cdot 2^1} + \frac{\sin x}{3\cdot 2^2} + \frac{\sin x}{4\cdot 2^3} + \frac{\sin x}{5\cdot 2^4} + \frac{\sin x}{6\cdot 2^5} + \dots$
19.Что такое степенной ряд?	Членами степенного ряда являются целые положительные степени переменной x либо двучлена $(x-a)$ $(a = const)$, умноженные на числовые коэффициенты: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots$

* Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7n+3}$

В числителе и знаменателе у нас находятся многочлены.

Решаем:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{7n+3} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Делим числитель и знаменатель на n

$$(*) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{7n+3}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{7+\frac{3}{n}^{\to 0}} = \frac{1}{7} \neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Итак, когда нам дан ЛЮБОЙ числовой ряд, **в первую очередь** проверяем (мысленно или на черновике): а стремится ли его общий член к нулю? Если не стремится – оформляем решение по образцу предыдущего примера.

Почему признак называется **необходимым**? Понимайте самым естественным образом: для того, чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю. И всё бы было отлично, но этого ещё не достаточно. Иными словами, **если общий член ряда стремится к нулю, ТО ЭТО ЕЩЕ НЕ ЗНАЧИТ, что ряд сходится** – он может, как сходиться, так и расходиться!

Например:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Данный ряд называется **гармоническим рядом**.

Легко заметить, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, НО. В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**. Запомните это!!!

Итак, что делать, если общий член ряда СТРЕМИТСЯ к нулю? В таких случаях для решения примеров нужно использовать другие, ***достаточные*** признаки сходимости / расходимости.

***Достаточные признаки сходимости**

Теорема 1 **(признак сравнения).** Если члены двух числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ удовлетворяют неравенству $a_n \le b_n$ для любых *n*, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда. Из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда. Иными словами, если ряд с меньшими членами расходится, то ряд с большими членами тоже расходится.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Сравним его с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

$n > \sqrt{n}$, $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

По признаку сравнения данный ряд расходится.

Теорема 2 **(признак Даламбера).** Если для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$, то:

а) при $\ell<1$ ряд сходится;

б) при $\ell>1$ ряд расходится;

в) при $\ell=1$ вопрос о сходимости открыт.

Пример 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n$, $a>0$.

$$\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a^{n+1}}{n\cdot a_n}=a\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=a\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1}=a,$$

при $a<1$ ряд сходится, $a>1$ ряд расходится.