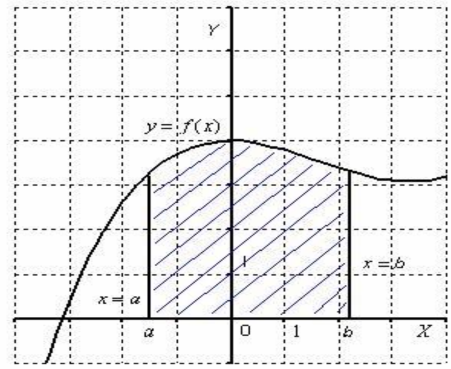
## Занятие 3

Тема. Применение определённого интеграла к решению прикладных задач: вычисление площади плоских фигур и объёмов тел.

**Криволинейной трапецией** называется плоская фигура, ограниченная осью $OX$, **прямыми** $x = a$, $x = b$ и графиком **непрерывной** на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$, которая **не меняет знак** на этом промежутке. Пусть данная фигура расположена *не ниже* оси абсцисс:




Тогда **площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу** $\int_a^b f(x)dx$.

У любого определенного интеграла (который существует) есть очень хороший геометрический смысл. **С точки зрения геометрии определенный интеграл – это ПЛОЩАДЬ**.

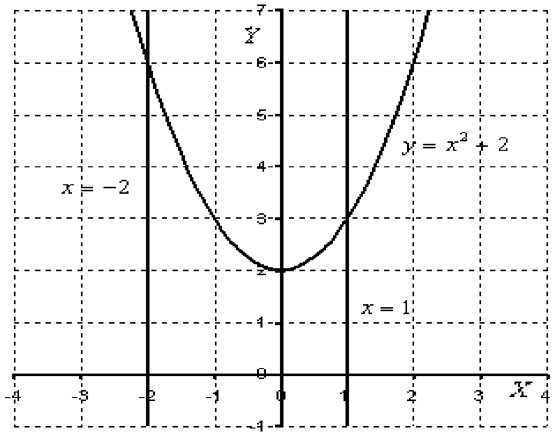
Пример 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

**Первый и важнейший момент решения – построение чертежа**. Причем, чертеж необходимо построить **ПРАВИЛЬНО**.

При построении чертежа я рекомендую следующий порядок: **сначала** лучше построить все прямые (если они есть) и только **потом** – параболы, гиперболы, графики других функций. Графики функций выгоднее строить **поточечно**.

Выполним чертеж (обратите внимание, что уравнение $y=0$ задает ось $OX$):




На отрезке $[-2;1]$ график функции $y = x^2 + 2$ расположен **над осью** $OX$, поэтому:

$$S = \int_{-2}^{1} (x^2+2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = 9$$

Ответ: $S = 9\ ед^2$

У кого возникли трудности, смотрите таблицу интегралов и вспомните формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

После того, как задание выполнено, всегда полезно взглянуть на чертеж и прикинуть, реальный ли получился ответ. В данном случае «на глазок» подсчитываем количество клеточек в чертеже – примерно 9 наберётся, похоже на правду. Если ответ получился отрицательным, то задание решено некорректно.

Если криволинейная трапеция расположена **под осью** $OX$ (или, по крайней мере, *не выше* данной оси), то её площадь можно найти по формуле: $S = -\int_a^b f(x)dx$

**Внимание! Не следует путать два типа задач**

1) Если Вам предложено решить просто определенный интеграл без всякого геометрического смысла, то он может быть отрицательным.

2) Если Вам предложено найти площадь фигуры с помощью определенного интеграла, то площадь всегда положительна! Именно поэтому в выше приведенной формуле стоит знак минус.

На практике чаще всего фигура расположена и в верхней и в нижней полуплоскости.

<u>Пример 2</u>

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

**Решение**: Сначала нужно выполнить чертеж. При построении чертежа в задачах на площадь нас больше всего интересуют точки пересечения линий. Найдем точки пересечения параболы $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x$. Это можно сделать двумя способами. Первый способ – аналитический. Решаем уравнение:

$2x - x^2 = -x$

$3x - x^2 = 0$

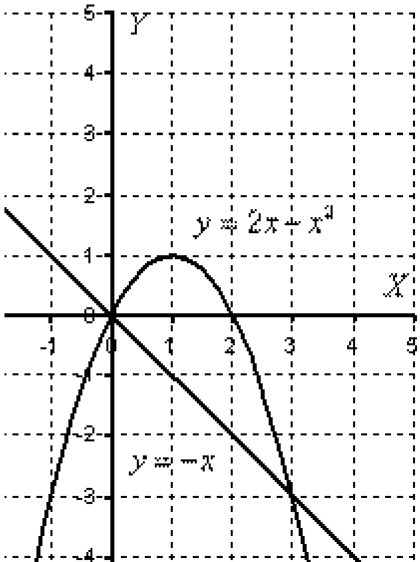
$x(3 - x) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 3$

Значит, нижний предел интегрирования $a = 0$, верхний предел интегрирования $b = 3$.

Второй способ – поточечное построение графика, при котором пределы интегрирования выясняются как бы «сами собой». Аналитический способ нахождения пределов приходится применять, если, например, график достаточно большой, или поточенное построение не выявило пределов интегрирования (они могут быть дробными или иррациональными.

Возвращаемся к нашей задаче: рациональнее сначала построить прямую и только потом параболу. Выполним чертеж:




Если на отрезке $[a;b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ **больше либо равна** некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми $x = a$, $x = b$, можно найти по формуле:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

Здесь уже не надо думать, где расположена фигура – над осью или под осью, а важно определить, какой график выше относительно другого.

В рассматриваемом примере очевидно, что на отрезке $[0;3]$ парабола располагается выше прямой, а поэтому из $2x-x^2$ необходимо вычесть $-x$

$$S=\int_0^3(2x-x^2-(-x))dx=\int_0^3(3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-0+0=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

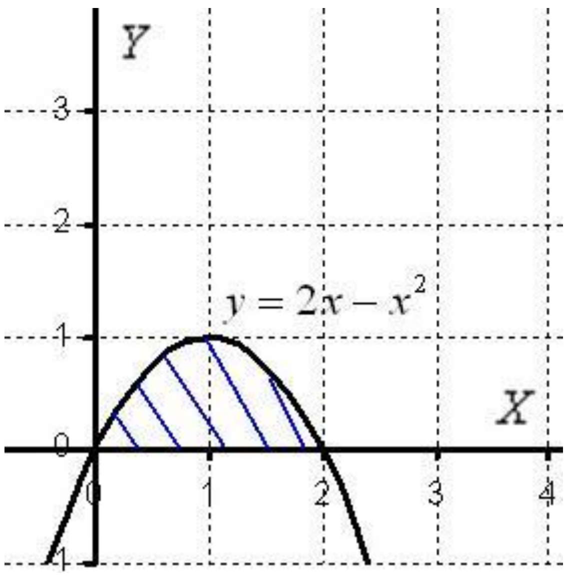
Ответ: $S=4\frac{1}{2}$ $ед^2$

Помимо нахождения площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла важнейшим приложением темы является **вычисление объема тела вращения**.

Пример 1

Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=0$ вокруг оси $OX$.

**Решение**: Как и в задаче на нахождение площади, **решение начинается с чертежа плоской фигуры**. То есть, на плоскости $XOY$ необходимо построить фигуру, ограниченную линиями $y=2x-x^2$, $y=0$, при этом не забываем, что уравнение $y=0$ задаёт ось $OX$.




Искомая плоская фигура заштрихована, именно она и вращается вокруг оси $OX$

**Объем тела вращения можно вычислить по формуле**:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

В формуле перед интегралом обязательно присутствует число $\pi$.

В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси $OX$. Это ничего не меняет – подынтегральная функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом интеграл всегда неотрицателен.

Вычислим объем тела вращения, используя данную формулу:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\pi\cdot\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}-0\right)=\frac{16\pi}{15}$$

**Ответ**: $V=\frac{16\pi}{15}\,ed^3.\approx 3{,}35\,ed^3.$

В ответе нужно обязательно указать размерность – кубические единицы $ed^3$ .