Занятие №23

Начинается новая (в школе уже была тригонометрия) тема **Тригонометрические функции.** Сделайте конспект в тетради.
Постепенно учить формулы приведения и формулы сложения.
Напоминаю, что в понедельник или вторник будет тест **Корни, степени,** готовьтесь
На конференции будем разбирать тригонометрию (таблицу№1 выучить, занятие №21)

ВНИМАНИЕ. Тест писали всего 16 человек, на конференции со мной работали 8 человек. Если такое повторится, то половина группы будет за октябрь не аттестована (это другими словами двойки)

Раздел 2. Основы тригонометрии
Тема 2.1. Основные понятия
Радианная мера угла. Вращательное движение. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа.

Геометрическое определение

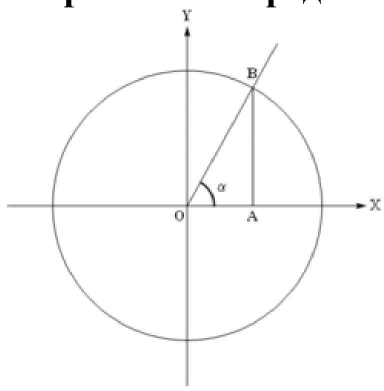


Рис. 1 Определение тригонометрических функций

Обычно тригонометрические функции определяются геометрически. Пусть нам дана декартова система координат на плоскости, и построена окружность радиуса R с центром в начале координат O. Всякий угол можно рассматривать как поворот от положительного направления оси абсцисс до некоторого луча OB, при этом направление поворота против часовой стрелки считается положительным, а по часовой стрелке — отрицательным. Абсциссу точки B обозначим x_B, ординату обозначим y_B (см. рисунок).

- Синусом называется отношение $\sin\alpha = \dfrac{y_B}{R}.$
- Косинусом называется отношение $\cos\alpha = \dfrac{x_B}{R}.$
- Тангенс определяется как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y_B}{x_B}.$
- Котангенс определяется как $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{x_B}{y_B}.$

Определение тригонометрических функций для острых углов

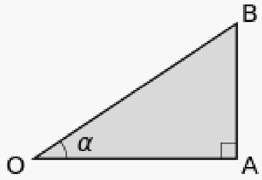


Рис. 2 Тригонометрические функции острого угла

В школьном курсе геометрии тригонометрические функции острого угла определяются как отношения сторон прямоугольного треугольника. Пусть *OAB* — прямоугольный треугольник с острым углом α. Тогда:

- Синусом угла α называется отношение $\frac{AB}{OB}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе).
- Косинусом угла α называется отношение $\frac{OA}{OB}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе).
- Тангенсом угла α называется отношение $\frac{AB}{OA}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему).
- Котангенсом угла α называется отношение $\frac{OA}{AB}$ (отношение прилежащего катета к противолежащему).

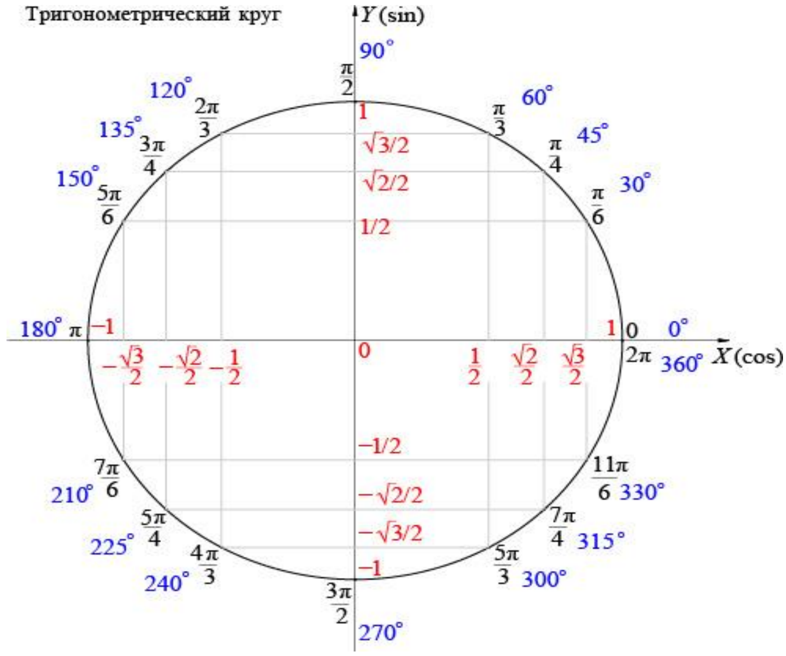
Формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно

$\alpha° = \left(\alpha \cdot \frac{\pi}{180}\right)$ рад	$\alpha_{рад} = \left(\alpha \cdot \frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$

Таблица№1

Значения тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---	0	---	0
ctgα	---	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	---	0	---

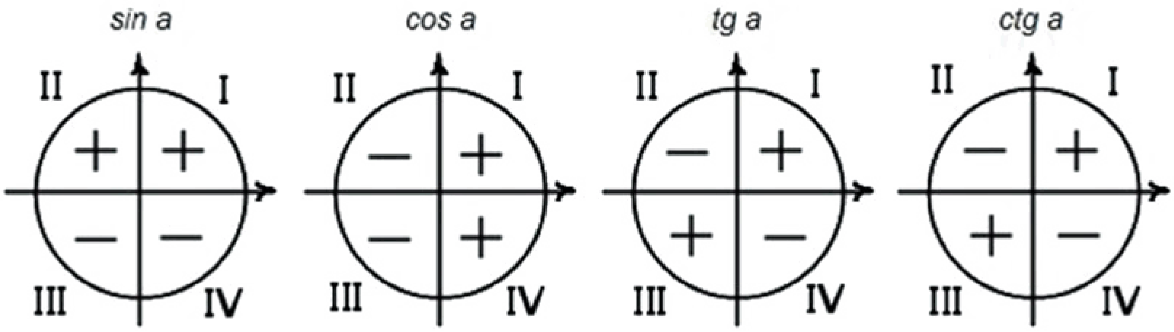


Тема 2.2. Основные тригонометрические тождества Формулы приведения. Формулы сложения. Формулы удвоения. Формулы половинного угла.

Правило формул приведения

1. Определите знак функции в соответствующей четверти.

Напомню их:



2. Запомните следующее:

при 90° и 270° функция изменяется на кофункцию.

при 180° и 360° функция на кофункцию не изменяется.

Что означает понятие — функция изменяется на кофункцию?

Ответ: синус меняется на косинус или наоборот, тангенс на котангенс или наоборот.

Пример 1:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$$

1) *название функции изменяется*

2) *угол* $\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$ *располагается в III четверти, косинус отрицательный*

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$

Пример 2:

$$\sin(2\pi+\alpha)$$

1) *название функции не изменяется*

2) *угол* $(2\pi+\alpha)$ *располагается в I четверти, синус положительный*

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$$

Пример 3:

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$$

1) *название функции изменяется*

2) *угол* $\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)$ *располагается в IV четверти, тангенс отрицательный*

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=-ctg\,2\alpha$$

Задание В какой четверти лежит угол α, если известно, что его синус положителен, а косинус – отрицателен?

Решение Синус некоторого угла положителен, если угол находится в первой или второй координатных четвертях, а косинус отрицательный в во второй и третьей четвертях. То есть одновременно синус положительный, а косинус отрицательный, если угол α лежит во второй четверти, то есть если $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

Ответ $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ – угол второй четверти.

Таблица формул приведения

Функция	*Углы*								
	$-\alpha$	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{Sin}\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{Cos}\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{Tg}\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{Ctg}\alpha$

Формулы сложения. Формулы удвоения.

Формулы суммы и разности	*Формулы двойного угла*
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$
$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$	$\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$
$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$	$\mathrm{ctg}2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$

$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$ $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta}$	

Задание Найти значение выражения $\sin 37^\circ \cos 23^\circ + \cos 37^\circ \sin 23^\circ$

Решение Применим формулу «синус суммы» справа налево, то есть в виде

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)$$

Тогда будем иметь, что

$$\sin 37^\circ \cos 23^\circ + \cos 37^\circ \sin 23^\circ = \sin\left(37^\circ + 23^\circ\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ $\sin 37^\circ \cos 23^\circ + \cos 37^\circ \sin 23^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Задание Упростить выражение $A=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha$

Решение Вначале упростим выражение $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$, которое представляет собой квадрат суммы. Раскроем это выражение по формуле:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$$

Сумма $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ по основному тригонометрическому тождеству равна 1, а последнее слагаемое сворачиваем по формуле «синус двойного угла». Тогда будем иметь:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin 2\alpha$$

Итак,

$$A=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha=1+\sin 2\alpha-\sin 2\alpha=1$$

Ответ $A=1$