

Уважаемые курсанты, мы закончили тему Тригонометрические функции, уравнения, поэтому из темы **Функции, свойства, графики** (почти последней темы перед экзаменом) я сначала предлагаю тригонометрические функции, а потом все остальные. Во вторник на конференции задавайте вопросы по контрольной вариант 3 и мы начнем по вашему конспекту изучать новую тему. Предложенные графики должны быть начерчены карандашом в тетради.

Мы будем изучать степенные функции, показательные, логарифмические. Преобразование графиков. Будем делать таблицу. Обязательно нужно работать в тетради

Тригонометрические функции, их свойства и графики.

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

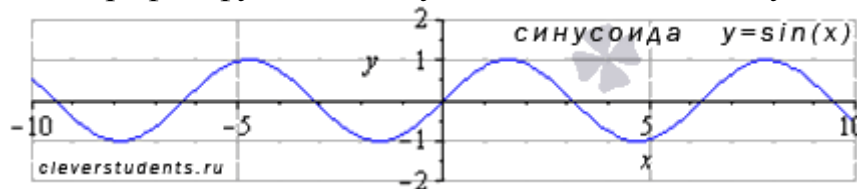
Тригонометрическим функциям присуще

понятие *периодичности* (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину

периода $f(x+T) = f(x)$, где T - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт «*наименьший положительный период*». Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

Функция $y = \sin x$.

Изобразим график функции синус, его называют "синусоида".



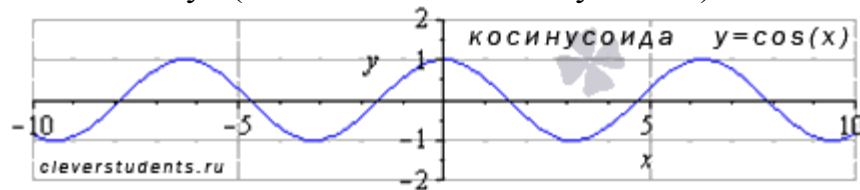
Свойства функции $y = \sin x$.

- Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция $y = \sin x$ определена при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции синуса равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} – множество целых чисел.
- Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y \in [-1; 1]$.
- Функция синус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

- Функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right], k \in \mathbb{Z}$,
- Функция возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right], k \in \mathbb{Z}$.
- Функция синус имеет локальные максимумы в точках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; 1 \right),$
 локальные минимумы в точках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; -1 \right), k \in \mathbb{Z}$.
- Функция $y = \sin x$ вогнутая при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], k \in \mathbb{Z},$
 выпуклая при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], k \in \mathbb{Z}.$
- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), k \in \mathbb{Z}.$
- Асимптот нет.

Функция $y = \cos x$.

График функции косинус (его называют "косинусоида") имеет вид:



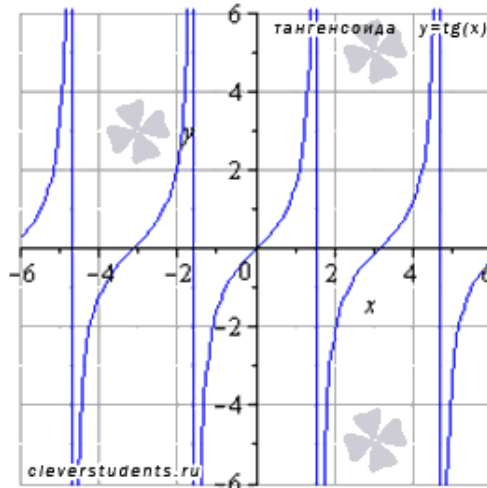
Свойства функции $y = \cos x$.

- Область определения функции косинус: $x \in (-\infty; +\infty).$
- Наименьший положительный период функции $y = \cos x$ равен двум пи: $T = 2\pi.$
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k,$ где $k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ – множество целых чисел.
- Область значений функции косинус представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: $y \in [-1; 1].$
- Функция косинус - четная, так как $y(-x) = y(x).$
- Функция убывает при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], k \in \mathbb{Z},$
 возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], k \in \mathbb{Z}.$
- Функция $y = \cos x$ имеет локальные максимумы в точках $(2\pi \cdot k; 1), k \in \mathbb{Z},$
 локальные минимумы в точках $(\pi + 2\pi \cdot k; -1), k \in \mathbb{Z}.$

- Функция вогнутая при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right], k \in \mathbb{Z}$,
выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k \right], k \in \mathbb{Z}$.
- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0 \right), k \in \mathbb{Z}$.
- Асимптот нет.

Функция $y = \operatorname{tg} x$.

График функции тангенс (его называют "тангенсоида") имеет вид:



Свойства функции тангенс $y = \operatorname{tg} x$.

- Область определения функции тангенс: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right)$,
где $k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ – множество целых чисел.
Поведение функции $y = \operatorname{tg} x$ на границе области определения $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k + 0} \operatorname{tg}(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k - 0} \operatorname{tg}(x) = +\infty$
- Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$, являются вертикальными асимптотами.
- Наименьший положительный период функции тангенс $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ – множество целых чисел.
- Область значений функции $y = \operatorname{tg} x: y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция тангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right), k \in \mathbb{Z}$.

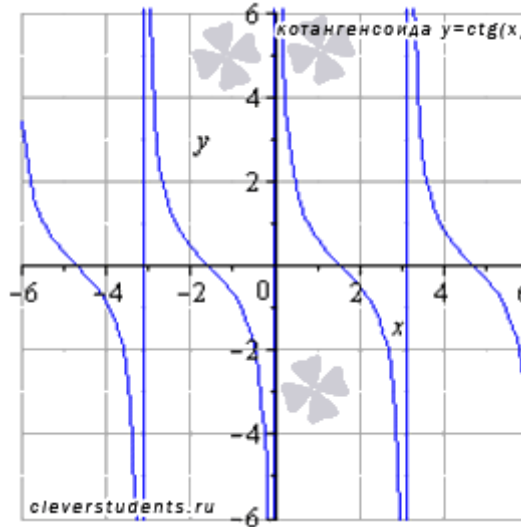
- Функция вогнутая при $x \in \left[\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right), k \in \mathbb{Z}$,

выпуклая при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k \right], k \in \mathbb{Z}$.

- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), k \in \mathbb{Z}$.
- Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

Функция $y = ctg x$.

Изобразим график функции котангенс (его называют "котангенсоида"):



Свойства функции котангенс $y = ctgx$.

- Область определения функции котангенс: $x \in (\pi \cdot k; \pi + \pi \cdot k)$, где $k \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} – множество целых чисел.
Поведение на границе области определения $\lim_{x \rightarrow \pi \cdot k + 0} tg(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \pi \cdot k - 0} tg(x) = -\infty$
Следовательно, прямые $x = \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$ являются вертикальными асимптотами.
- Наименьший положительный период функции $y = ctgx$ равен пи: $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} – множество целых чисел.
- Область значений функции котангенс: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция $y = ctgx$ убывает при $x \in (\pi \cdot k; \pi + \pi \cdot k), k \in \mathbb{Z}$.

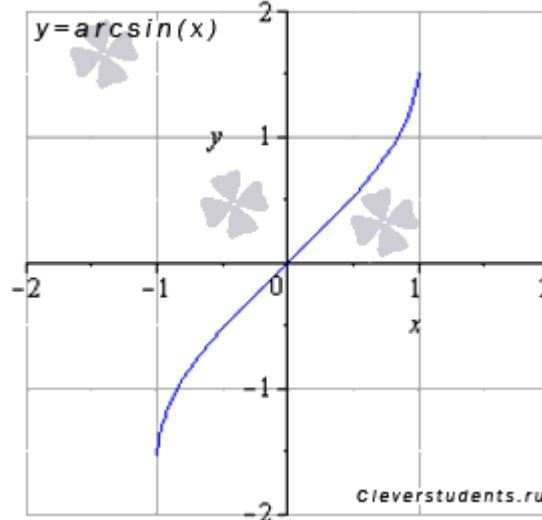
- Функция котангенс вогнутая при $x \in \left(\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k \right]$, $k \in \mathbb{Z}$,
выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0 \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс) являются основным элементарным функциями. Часто из-за приставки "арк" обратные тригонометрические функции называют аркфункциями. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Функция арксинус $y = \arcsin(x)$.

Изобразим график функции арксинус:

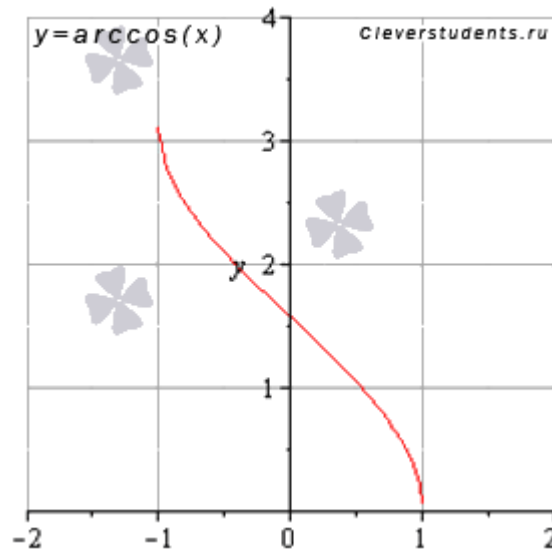


Свойства функции арксинус $y = \arcsin(x)$.

- Областью определения функции арксинус является интервал от минус единицы до единицы включительно: $x \in [-1; 1]$.
- Область значений функции $y = \arcsin(x)$: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$.
- Функция арксинус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция $y = \arcsin(x)$ возрастает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1; 1]$.
- Функция вогнутая при $x \in [0; 1]$, выпуклая при $x \in [-1; 0]$.
- Точка перегиба $(0; 0)$, она же ноль функции.
- Асимптот нет.

Функция арккосинус $y = \arccos(x)$.

График функции арккосинус имеет вид:

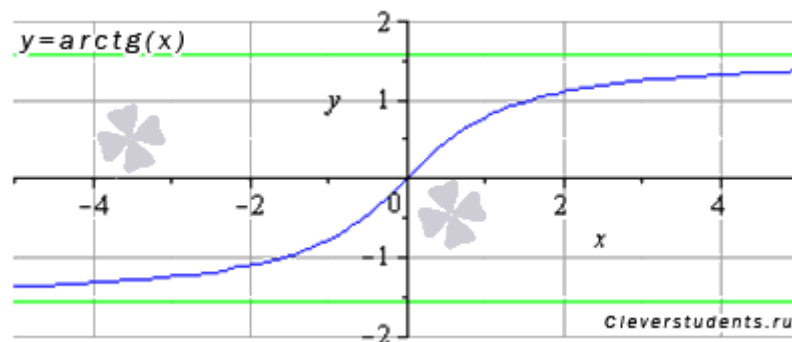


Свойства функции арккосинус $y = \arccos(x)$.

- Область определения функции арккосинус: $x \in [-1; 1]$.
- Область значений функции $y = \arccos(x)$: $y \in [0; \pi]$.
- Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Функция арккосинус убывает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1; 1]$.
- Функция вогнутая при $x \in [-1; 0]$, выпуклая при $x \in [0; 1]$.
- Точка перегиба $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Асимптот нет.

Функция арктангенс $y = \arctg(x)$.

График функции арктангенс имеет вид:



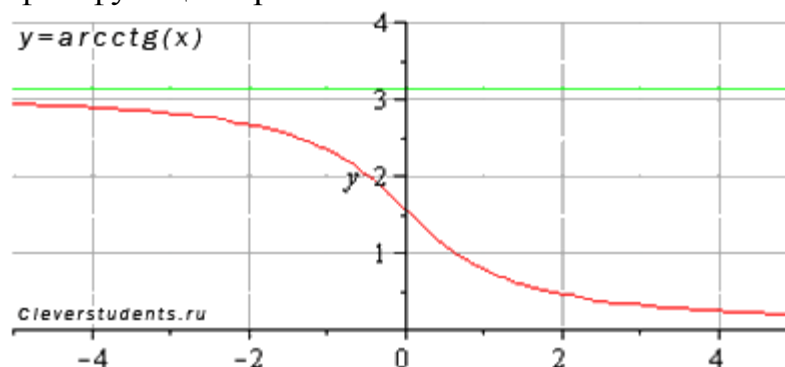
Свойства функции арктангенс $y = \arctg(x)$.

- Область определения функции $y = \arctg(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений функции арктангенс: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Функция арктангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

- Функция возрастает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция арктангенс вогнутая при $x \in (-\infty; 0]$, выпуклая при $x \in [0; +\infty)$.
- Точка перегиба $(0; 0)$, она же ноль функции.
- Горизонтальными асимптотами являются прямые $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = \frac{\pi}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$. На чертеже они показаны зеленым цветом.

Функция арккотангенс $y = \text{arcctg}(x)$.

Изобразим график функции арккотангенс:



Свойства функции арккотангенс $y = \text{arcctg}(x)$.

- Областью определения функции арккотангенс является все множество действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений функции $y = \text{arcctg}(x)$: $y \in (0; \pi)$.
- Функция арккотангенс не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Функция убывает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in [0; +\infty)$, выпуклая при $x \in (-\infty; 0]$.
- Точка перегиба $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Горизонтальными асимптотами являются прямые $y = \pi$ при $x \rightarrow -\infty$ (на чертеже показана зеленым цветом) и $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$.