Занятие №32

Отправляется **еще раз теоретический** материал по обратным тригонометрическим функциям и уравнениям. Должен быть сделан конспект. Напоминаю, что способы решения уравнений - дополнительный материал, мы его рассмотрим позже. На конференции 10.10.20, кроме подготовки к тесту (по первой части тригонометрии), мы обязательно рассмотрим обратные тригонометрические функции

Тема 2.4. Обратные тригонометрические функции. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения.

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида: $\boldsymbol{sin\,x = a,\ cos\,x = a,\ tg\,x = a,\ ctg\,x = a.}$

Рассмотрим, при каких значениях $\boldsymbol{a}$ тригонометрические уравнения разрешимы и как правильно находить все решения таких уравнений.

Уравнение $\boldsymbol{sin\,t = a}$

Так как множество значений функции $\boldsymbol{y = sin\,x}$ – отрезок $[\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1}]$, то данное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{a}| \le \boldsymbol{1}.$

Далее, из-за периодичности функции $\boldsymbol{y = sin\,x}$, каждому значению $\boldsymbol{a}$ соответствует бесконечное множество решений. Поэтому все решения описываются формулами:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = arcsin\,a + 2\pi k} \\ \boldsymbol{x_2 = \pi - arcsin\,a + 2\pi k,\ \ k \in Z} \end{cases}$$

или обобщенной формулой:

$$\boldsymbol{x = (-1)^k arcsin\,a + \pi k,\ \ k \in Z\,.}$$

Заметим, что $\boldsymbol{arcsin(-a) = -arcsin\,a.}$

Пример. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение:

$x = (-1)^{\mathrm{k}} \mathrm{arcsin}\frac{1}{2} + \pi k,\ \ k \in Z,$

$x = (-1)^{\mathrm{k}} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z.$

Ответ:

$x = (-1)^{\mathrm{k}} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z.$

Уравнение $\boldsymbol{cos\,t = a}$

Так как множество значений функции $\boldsymbol{y = cos\,x}$ – отрезок $[\boldsymbol{-1}; \boldsymbol{1}]$, то данное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $|\boldsymbol{a}| \le \boldsymbol{1}$

Множество решений записывается в виде:

$$\boldsymbol{x = \pm \mathbf{arccos}\,a + 2\pi k, k \in Z.}$$

Заметим, что $\boldsymbol{arccos(-a) = \pi - arccos\,a.}$

Пример. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Решение:

$x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z,$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ:

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Уравнение $\boldsymbol{tg\ t = a}$

Данное уравнение разрешимо при любом $\boldsymbol{a}$. Все решения задаются формулой:

$$\boldsymbol{x = arctg\, a + \pi k, k \in Z.}$$

Заметим, что $\boldsymbol{arctg(-a) = -arctg\ a}$.

Пример. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение:

$x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k, k \in Z,$

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

Ответ:

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

Уравнение $\boldsymbol{ctg\ t = a}$

Данное уравнение разрешимо при любом $\boldsymbol{a}$. Все решения задаются формулой:

$$\boldsymbol{x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in Z.}$$

Заметим, что $\boldsymbol{arcctg(-a) = \pi - arcctg\ a.}$

Пример. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Решение:

$x = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \pi k, k \in Z,$

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Ответ:

$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Обратные тригонометрические функции

$\boldsymbol{arcsin\ a = t}$, $\boldsymbol{a \in [-1; 1]}$, $\boldsymbol{t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$ $\boldsymbol{arcsin(-a) = -arcsin\ a}$	$\boldsymbol{arctg\ a = t}$, $\boldsymbol{t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$ $\boldsymbol{arctg\ (-a) = -arctg\ a}$
$\boldsymbol{arccos\ a = t}$, $\boldsymbol{a \in [-1; 1]}$, $\boldsymbol{t \in [0; \pi]}$ $\boldsymbol{arccos(-a) = \pi - arccos\ a}$	$\boldsymbol{arcctg\ a = t}$, $\boldsymbol{t \in (0; \pi)}$ $\boldsymbol{arcctg\ (-a) = \pi - arcctg\ a}$

Решение тригонометрических уравнений

$\boldsymbol{sin\, t = a}$	$\boldsymbol{cos\, t = a}$	$\boldsymbol{tg\, t = a}$	$\boldsymbol{ctg\, t = a}$
$\boldsymbol{t = (-1)^n\, arcsin\, a + \pi n, n \in Z}$	$\boldsymbol{t = \pm\, arccos\, a + 2\pi n, n \in Z}$	$\boldsymbol{t = arctg\, a + \pi n, n \in Z}$	$\boldsymbol{t = arcctg\, a + \pi n, n \in Z}$

Частные случаи

$\boldsymbol{sin\, t = 0}$	$\boldsymbol{sin\, t = 1}$	$\boldsymbol{sin\, t = -1}$	$\boldsymbol{cos\, t = 0}$	$\boldsymbol{cos\, t = 1}$	$\boldsymbol{cos\, t = -1}$
$\boldsymbol{t = \pi n, n \in Z}$	$\boldsymbol{t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z}$	$\boldsymbol{t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z}$	$\boldsymbol{t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z}$	$\boldsymbol{t = 2\pi n, n \in Z}$	$\boldsymbol{t = \pi + 2\pi n, n \in Z}$

Основные методы решения

Любое тригонометрическое уравнение в процессе решения с помощью надлежащих преобразований должно быть приведено к простейшим. Наиболее часто при решении тригонометрических уравнений применяются следующие методы:

- разложение на множители;
- способ замены (сведение к алгебраическим уравнениям);
- сведение к уравнениям, однородным относительно $\boldsymbol{sin\, x}$ и $\boldsymbol{cos\, x}$;
- преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- равенство одноименных тригонометрических функций;
- равенство одноименных тригонометрических функций
- введение вспомогательного аргумента.

При этом, как правило, в процессе решения тригонометрического уравнения приходится использовать не один, а несколько из указанных выше методов.

Способ замены

Данным методом решаются уравнения вида: $a\, sin^2x + b\, sin\, x + c = 0$, $cos^2x + b\, cos\, x + c = 0$, $a\, tg^2x + b\, tg\, x + c = 0$, $a\, ctg^2x + b\, ctg\, x + c = 0$ при $a \neq 0$.

Они сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям с помощью замены $sin\, x = t$ или $cos\, x = t$. Уравнения $a\, sin^2x + b\, cos\, x + c = 0$, $a\, cos^2x + b\, sin\, x + c = 0$ не являются с виду алгебраическими, но их можно свести к алгебраическим. При решении уравнений этим методом необходимо знать формулы:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$=1, $\quad$ $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$,

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\quad$ $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$,

$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\quad$ $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Пример 1. Решить уравнение $cos^2x + cos\, x - 2 = 0$.

Решение. Это уравнение является квадратным относительно $cos\, x$. Поэтому сделаем замену $cos\, x = t$. В результате получим уравнение $t^2 + t - 2 = 0$. Его корни: $t_1 = 1$, $t_2 = -2$, то есть получаем уравнение $cos\, x = 1$ или

$\cos x = -2$. Первое уравнение дает $x = 2\pi k,\ k \in Z$. Второе уравнение не имеет корней.
Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z$.
Пример 2. Решить уравнение $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$.
Решение. Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде $6(1 - \cos^2 x) + 5\sin x - 7 = 0;$ $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$. Сделаем замену $t = \sin x$. Получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t + 1 = 0$, решая которое, имеем: $D = (-5)^2 - 6 \cdot 4 = 25 - 24 = 1$ $t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{1}{3}$. Таким образом, получим два простейших уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = \frac{1}{3}$. Решая их, имеем $x = (-1)^{\mathrm{k}} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = (-1)^{\mathrm{k}} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.
Ответ:
$x = (-1)^{\mathrm{k}} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\ x = (-1)^{\mathrm{k}} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Однородные уравнения

Уравнения:

$$a_0 \sin x + a_1 \cos x = 0,$$
$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x = 0,$$

$$a_0 \sin^3 x + a_1 \sin^2 x \cos x + a_2 \sin x \cos^2 x + a_3 \cos^3 x = 0,$$
$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$$

Называются *однородными относительно* $\sin x$ и $\cos x$. Они обладают тем свойством, что сумма показаний степеней при $\sin x$ и $\cos x$ у всех членов уравнения одинакова. Делением на $\cos x,\ \cos^2 x, \ldots \cos^n x$ соответственно уравнения приводятся к алгебраическим уравнениям относительно $tg\, x$. При этом, конечно, предполагается, что коэффициент $a \neq 0$. В результате получаем равносильное уравнение, так как разделили на $\cos x \neq 0$ (если бы $\cos x = 0$, то из исходного уравнения следует, что и $\sin x = 0$, а это невозможно, так как $\sin x$ и $\cos x$ при одном и том же значении x в нуль не обращаются, ибо всегда $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).
Пример. Решить уравнение: $3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0$.
Решение. Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $3\, tg^2 x - 2\, tg\, x - 1 = 0$. Введем новую переменную $tg\, x = t$ и решим квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 1 = 0$. Его корни $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических уравнения $tg\, x = 1,\ tg\, x = -\frac{1}{3}$. Решая их, найдем: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ или $x = -arctg \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$.
Ответ:
$x = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ x = -arctg \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$.

Разложение на множители

При решении уравнений этим методом нужно пользоваться известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Необходимо также знать уже приведенные формулы и дополнительно:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta + 1}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta}$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x - \cos x = 0$.

Решение. Применяя формулу синуса двойного угла, получим $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$. Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\cos x = 0$, $2\sin x - 1 = 0$. Решение 1-го уравнения: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$. Уравнение $2\sin x - 1 = 0$ преобразуем к виду $\sin x = \frac{1}{2}$, имеющему решение $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Ответ:

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k;\; x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \sin x \cos x + 1$.

Решение: Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители:

$$\sin x + \cos x - \sin x \cos x - 1 = 0,$$
$$\sin x (1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0,$$
$$(\sin x - 1)(1 - \cos x) = 0.$$

Отсюда следует, что $\sin x - 1 = 0$ или $1 - \cos x = 0$, то есть имеем уравнение $\sin x = 1$ или $\cos x = 1$. Решая их, получим $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ или $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ:

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \ x = 2\pi k,\ k \in Z.$

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta + 1}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta}$$

Пример. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0.$

Решение: По формулам приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$. Получаем уравнение $\sin 3x - \sin 2x = 0$. Пользуясь, выше приведенной формулой, преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin 3x - \sin 2x = 2\sin\frac{3x-2x}{2}\cos\frac{3x+2x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}.$$

В результате имеем уравнение $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0$, откуда $\sin\frac{x}{2} = 0$ или $\cos\frac{5x}{2} = 0$. Решая эти уравнения, получим $x = 2\pi k,\ k \in Z$ и $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k$, $k \in Z$.

Ответ:

$x = 2\pi k;\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k,\ k \in Z.$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta + 1}{\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Пример. Решить уравнение $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$.
Решение: Преобразуем по выше приведенным формулам левую и правую части уравнения. В результате получим:

$$\frac{1}{2}[\cos(2x-6x) - \cos(2x+6x)] = \frac{1}{2}[\cos(x-3x) + \cos(x+3x)],$$

Иначе $\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x$, то есть $\cos 8x + \cos 2x = 0$. Преобразовывая теперь в произведение сумму косинусов, будем иметь $2\cos 5x \cos 3x = 0$, откуда $\cos 5x = 0$ или $\cos 3x = 0$. Решая эти уравнения, получим $x = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi k}{5},\ k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.

Ответ:
$x = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi k}{5};\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z.$

Использование формул понижения степени

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Пример. Решить уравнение:

$$\cos^2 3x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \cos^2 7x + \cos^2 9x + \cos\frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Сразу заметим, что $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, а $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \cos 5x$, и уравнение принимает вид $\cos^2 3x + \cos 5x = \cos^2 7x + \cos^2 9x$. Используя, выше приведенные формулы, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}(1+\cos 6x) + \frac{1}{2}(1+\cos 10x) = \frac{1}{2}(1+\cos 14x) + \frac{1}{2}(1+\cos 18x),$$

то есть $\cos 6x + \cos 10x = \cos 14x + \cos 18x$. Преобразуем суммы косинусов в произведения, тогда получим

$$2\cos 8x \cos 2x = 2\cos 16x \cos 2x,$$

$$\cos 2x(\cos 16x - \cos 8x) = 0.$$

Наконец, преобразовывая разность косинусов в произведение, получим $-2\sin 4x \sin 12\cos 2x = 0$. Задача свелась к решению совокупности трех уравнений: $\sin 4x = 0$ или $\sin 12x = 0$ или $\cos 2x = 0$, из которой находим три семейства решений заданного уравнения: $x = \frac{\pi k}{4},\ x = \frac{\pi n}{12},\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2},\ k,n,l \in Z$.

Однако ответ можно записать в виде $x = \frac{\pi n}{12},\ n \in Z$, поскольку он содержит в себе два других семейства (чтобы убедиться в этом, достаточно положить $n=3k$ или $n=6l+3$).

Ответ: $\frac{\pi n}{12},\ n\in Z$.

Равенство одноименных тригонометрических функций

Данным методом решаются уравнения вида $\sin\alpha=\sin\beta,\ \cos\alpha=\cos\beta,\ tg\alpha=tg\beta$.

Теорема 1. Для того чтобы синусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий

$$\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta=(2n+1)\pi\\ \alpha-\beta=2n\pi,\ n\in Z\end{array}\right..$$

Теорема 2. Для того чтобы косинусы двух углов были равны, необходимо и достаточно выполнения одного из условий

$$\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta=2n\pi\\ \alpha-\beta=2n\pi,\ n\in Z\end{array}\right..$$

Теорема 3. Для того чтобы тангенсы двух углов были равны, необходимо и достаточно, одновременное выполнение двух условий

$$\begin{cases}\alpha\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},\ \ \beta\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\\ \alpha-\beta=n\pi,\ n\in Z\end{cases}.$$

Пример . Решить уравнение $\sin 3x=\sin 5x$.

Решение. На основании условий равенства двух синусов имеем:

$$\left[\begin{array}{l}5x-3x=2k\pi\\ 3x+5x=(2k+1)\pi,\ k\in Z\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{(2k+1)\pi}{8},\ k\in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{(2k+1)\pi}{8},\ k\in Z\end{array}\right.$

Введение вспомогательного аргумента

Метод основан на преобразовании выражения $a\sin x+b\cos x$, где *a* и *b* – постоянные, не обращающиеся в нуль одновременно.

Введем угол φ, положив

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

где φ находится из уравнения $tg\varphi=\frac{b}{a}$.

Пример . Решить уравнение $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1$.

Решение. Так как $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$, то $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ уже являются соответственно косинусом и синусом определенного угла; ясно, что этот угол $\frac{\pi}{3}$. Таким образом, получаем

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

Решая это уравнение, имеем $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

Уравнение, рассмотренное в последнем примере, имеет вид $a\sin x+b\cos x=c$. Однако решить такие уравнения можно и другими методами.

Метод рационализации для уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$

Известно, что если $\alpha\neq(2n+1)\pi,\ n\in Z$, то $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha$ выражаются рационально через $tg\frac{\alpha}{2}$.

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Вводим вспомогательное неизвестное так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно вспомогательного неизвестного.

Данное уравнение можно переписать в виде

$$a\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}+b\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}=c.$$

Положим $tg\frac{\alpha}{2}=t$, тогда получим

$$a\frac{2t}{1+t^2}+b\frac{1-t^2}{1+t^2}=c.$$

Решим данное уравнение и получим следующие ответы

1. если $a^2+b^2<c^2$, то у уравнения нет корней;

2. если $a^2+b^2\ge c^2,\ c\ne -b$, то $x=2arctg\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}+2n\pi,\ n\in Z$;

3. если $c\ne -b$, то $x=\begin{cases}(2n+1)\pi\\ -2arctg\dfrac{b}{a}+2n\pi,\ n\in Z\end{cases}$.

Пример . Решить уравнение $3\sin x+4\cos x=3$.

Решение. $a=3,\ b=4,\ c=3,\ a^2+b^2>c^2$ - уравнение имеет решение.

$$3\frac{2t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}=3\ \Rightarrow\ 7t^2-6t-1=0,\ t_{1,2}=\frac{3\pm 4}{7}.$$

1) $t_1=1,\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+n\pi,\ x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in Z$;

2) $t_2=-\dfrac{1}{7},\ \dfrac{x}{2}=-arctg\dfrac{1}{7}+n\pi,\ x=-2arctg\dfrac{1}{7}+2n\pi,\ n\in Z$.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,\ x=-2arctg\dfrac{1}{7}+2n\pi,\ n\in Z$.

Приведение к однородному для уравнения вида $a\sin x+b\cos x=c$

Данное уравнение перепишем в виде

$$2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=c\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

т.е. имеем однородное уравнение

$$(c+b)\sin^2\frac{x}{2}-2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+(c-b)\cos^2\frac{x}{2}=0.$$