Занятие №13

Логарифм. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действия с логарифмами.

Уважаемые курсанты, начинается новая тема «Логарифмы», в школе такой темы не было. Сделайте конспект в рабочей тетради, на следующем занятии будут предложены решенные примеры, а потом аналогичные будете решать сами. Высылать конспект не надо, при очном обучении будем его использовать.

При начале очного обучения наличие всех работ в конспекте будет проверяться

Логарифм числа b **по основанию** a (от греч. λόγος — «слово», «отношение» и ριθμός — «число») определяется как показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b$, произносится: «*логарифм* b *по основанию* a».

Из определения следует, что нахождение $x = \log_a b$ равносильно решению уравнения $a^x = b$. Например, $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$.

Вычисление логарифма называется **логарифмированием**. Числа a, b и чаще всего вещественные, но существует также теория комплексных логарифмов.

Логарифмы обладают уникальными свойствами, которые определили их широкое использование для существенного упрощения трудоёмких вычислений. При переходе «в мир логарифмов» умножение заменяется на значительно более простое сложение, деление — на вычитание, а возведение в степень и извлечение корня преобразуются соответственно в умножение и деление на показатель степени. Лаплас говорил, что изобретение логарифмов, «сократив труд астронома, удвоило его жизнь».

Определение логарифмов и таблицу их значений (для тригонометрических функций) впервые опубликовал в 1614 году шотландский математик Джон Непер. Логарифмические таблицы, расширенные и уточнённые другими математиками, повсеместно использовались для научных и инженерных расчётов более трёх веков, пока не появились электронные калькуляторы и компьютеры.

Со временем выяснилось, что логарифмическая функция $y = \log_a x$ незаменима и во многих других областях человеческой деятельности: решение дифференциальных уравнений, классификация значений величин (например, частота и интенсивность звука), аппроксимация различных зависимостей, теория информации, теория вероятностей и т. д.. Эта функция относится к числу элементарных, она обратна по отношению к показательной функции. Чаще всего используются вещественные логарифмы с основаниями 2 (двоичный), e (натуральный логарифм) и 10 (десятичный).

Вещественный логарифм

Логарифм вещественного числа $x = \log_a b$ по определению есть решение уравнения $a^x = b$. Случай $a = 1$ интереса не представляет, поскольку тогда при $b \neq 1$это уравнение не имеет решения, а при $b = 1$ любое число является решением; в обоих случаях логарифм не определён. Аналогично заключаем, что логарифм не существует при нулевом или отрицательном a; кроме того, значение показательной функции a^x всегда положительно, поэтому следует исключить также случай отрицательного b. Окончательно получаем:

Вещественный логарифм $\log_a b$ имеет смысл при $a > 0, a \neq 1, b > 0$

Как известно, показательная функция $y = a^x$ (при выполнении указанных условий для a) существует, монотонна и каждое значение принимает только один раз, причём диапазон её значений содержит все положительные вещественные числа. Отсюда следует, что значение вещественного логарифма положительного числа всегда существует и определено однозначно.

Наиболее широкое применение нашли следующие виды логарифмов:

- Натуральные: $\log_e b$ или $\ln b$, основание: число Эйлера (e);
- Десятичные: $\log_{10} b$ или $\lg b$, основание: число 10;
- Двоичные: $\log_2 b$ или $\mathrm{lb}\ b$, основание: 2. Они применяются, например, в теории информации, информатике, во многих разделах дискретной математики.

Свойства

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество:

$a^{\log_a b} = b$

Следствие: из равенства двух вещественных логарифмов следует равенство логарифмируемых выражений. В самом деле, если $\log_a b = \log_a c$, то $a^{\log_a b} = a^{\log_a c}$, откуда, согласно основному тождеству: $b = c$.

Два равенства, очевидных из определения логарифма:

$\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1.$

Логарифм произведения, частного от деления, степени и корня

Приведём сводку формул в предположении, что все значения положительны:

	Формула	Пример
Произведение	$\log_a(xy) = \log_a(x) +$ l	$\log_3(243) = \log_3(9 \cdot 27) = \log_3(9) + \log_3(2$
Частное от	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) -$	$\lg\left(\frac{1}{1000}\right) = \lg(1) - \lg(1000) = 0 - 3 =$ -

деления		
Степень	$\log_a(x^p) = p\log_a(x)$	$\log_2(64) = \log_2(2^6) = 6\log_2(2) = 6$
Корень	$\log_a \sqrt[p]{x} = \frac{\log_a(x)}{p}$	$\lg\sqrt{1000} = \frac{1}{2}\lg 1000 = \frac{3}{2} = 1.5$

Замена основания логарифма

Логарифм $\log_a b$ по основанию a можно преобразовать в логарифм по другому основанию c:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Следствие (при $b = c$) — перестановка основания и логарифмируемого выражения:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

См. пример такой перестановки в разделе десятичный логарифм.

Коэффициент $\frac{1}{\log_c a} = \log_a c$ в формуле замены основания называется модулем.

Десятичный логарифм

Логарифмы по основанию 10 (обозначение: $\lg x$) до изобретения калькуляторов широко применялись для вычислений. Они обладают преимуществом перед логарифмами с иным основанием: целую часть $[\lg x]$ логарифма числа x легко определить:

- Если $x \geqslant 1$, то $[\lg x]$ на 1 меньше числа цифр в целой части числа x. Например, сразу очевидно, что $\lg 345$ находится в промежутке $(2, 3)$.
- Если $0 < x < 1$, то ближайшее к $\lg x$ целое в меньшую сторону равно общему числу нулей в x перед первой ненулевой цифрой (включая ноль перед запятой), взятому со знаком минус. Например, $\lg 0{,}0014$ находится в интервале $(-3, -2)$.

Кроме того, при переносе десятичной запятой в числе на n разрядов значение десятичного логарифма этого числа изменяется на n. Например, $\lg 8314{,}63 = \lg 8{,}31463 + 3$. Отсюда следует, что для вычисления десятичных логарифмов достаточно составить таблицу логарифмов для чисел в диапазоне от 1до 10.

Связь с натуральным логарифмом:

$$\ln x \approx 2{,}30259\ \lg x, \quad \ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \ln 10 \cdot \lg x = (2{,}30259\ldots) \lg x$$

$$\lg x \approx 0{,}43429\ \ln x, \quad \lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \lg e \cdot \ln x = (0{,}43429\ldots) \ln x$$

Поскольку применение логарифмов для расчётов с появлением вычислительной техники почти прекратилось, в наши дни десятичный логарифм в значительной степени вытеснен натуральным[16]. Он сохраняется в основном в тех математических моделях, где исторически укоренился — например, при построении логарифмических шкал.

Другие тождества и свойства

Если выражения для основания логарифма и для логарифмируемого выражения содержат возведение в степень, для упрощения можно применить следующее тождество:

$$\log_{a^q} b^p = \frac{p}{q} \log_a b$$

Это тождество сразу получается, если в логарифме слева заменить основание a^q на a по вышеприведённой формуле замены основания. Следствия:

$$\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \log_a b; \quad \log_{\sqrt[n]{a}} b = n \log_a b; \quad \log_{a^k} b^k = \log_a b$$

Ещё одно полезное тождество:

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$$

Для его доказательства заметим, что логарифмы левой и правой частей по основанию a совпадают (равны $\log_a b \cdot \log_a c$), а тогда, согласно следствию из основного логарифмического тождества, левая и правая части тождественно равны.