

## Занятие №39

Уважаемые курсанты, вам был отправлен на сайт материал по **Тригонометрическим функциям**, а теперь **Степенные функции**. Сделать конспект и подготовиться отвечать на конференции. В Разделе 3 прочитаете-какие функции будем изучать. Пока тригонометрические и степенные. Частично эти функции были в школьном материале.

### **Раздел 3. Функции, их свойства и графики**

**Функции. Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций, заданных различными способами.**

**Свойства функции. Монотонность, четность, нечетность, ограниченность, периодичность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума. Графическая интерпретация. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Арифметические операции над функциями.**

**Сложная функция (композиция). Понятие о непрерывности функции.**

**Обратные функции. Область определения и область значений обратной функции. График обратной функции.**

**Определения функций, их свойства и графики. Преобразования графиков. Параллельный перенос, симметрия относительно осей координат и симметрия относительно начала координат, симметрия относительно прямой  $y = x$ , растяжение и сжатие вдоль осей координат.**

Знание **основных элементарных функций, их свойств и графиков** не менее важно, чем знание таблицы умножения. Они как фундамент, на них все основано, из них все строится и к ним все сводится.

В этой статье мы перечислим все основные элементарные функции, приведем их графики и дадим без вывода и доказательств **свойства основных элементарных функций** по схеме:

- область определения функции;
- поведение функции на границах области определения, вертикальные асимптоты (при необходимости смотрите статью классификация точек разрыва функции);
- четность и нечетность;
- область значений функции;
- промежутки возрастания и убывания, точки экстремума;
- промежутки выпуклости (выпуклости вверх) и вогнутости (выпуклости вниз), точки перегиба (при необходимости смотрите статью выпуклость функции, направление выпуклости, точки перегиба, условия выпуклости и перегиба);
- наклонные и горизонтальные асимптоты;
- особые точки функций;
- особые свойства некоторых функций (например, наименьший положительный период у тригонометрических функций).

**Основными элементарными функциями** являются: постоянная функция (константа), корень  $n$ -ой степени, степенная функция,

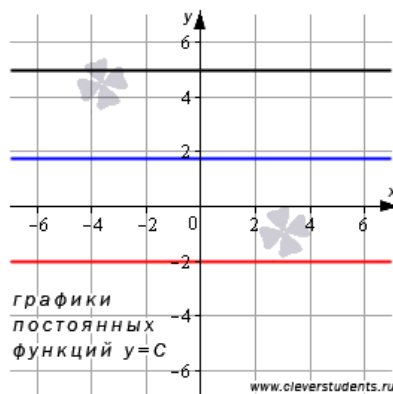
показательная, логарифмическая функция, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

- Постоянная функция (константа), ее график и свойства.  $y = C$
- Корень  $n$ -ой степени, свойства и график.
- Степенная функция, ее график и свойства.  $y = x^a$
- Показательная функция, свойства, график.  $y = a^x$
- Логарифмическая функция, ее свойства, графическая иллюстрация.  $y = \log_a(x)$
- Свойства и графики тригонометрических функций.  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg}x$ ,  $y = \operatorname{ctg}x$
- Обратные тригонометрические функции (аркфункции), их свойства и графики.  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg}x$ ,  $y = \operatorname{arccot}x$

### Постоянная функция.

Постоянная функция задается на множестве всех действительных чисел формулой  $y = C$ , где  $C$  – некоторое действительное число. Постоянная функция ставит в соответствие каждому действительному значению независимой переменной  $x$  одно и то же значение зависимой переменной  $y$  – значение  $C$ . Постоянную функцию также называют константой.

Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс и проходящая через точку с координатами  $(0, C)$ . Для примера покажем графики постоянных функций  $y=5$ ,  $y=-2$  и  $y = \sqrt{3}$ , которым на рисунке, приведенном ниже, отвечают черная, красная и синяя прямые соответственно.



### Свойства постоянной функции.

- Область определения: все множество действительных чисел.
- Постоянная функция является четной.
- Область значений: множество, состоящее из единственного числа  $C$ .
- Постоянная функция невозрастающая и неубывающая (на то она и постоянная).

- Говорить о выпуклости и вогнутости постоянной не имеет смысла.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точку  $(0, C)$  координатной плоскости.

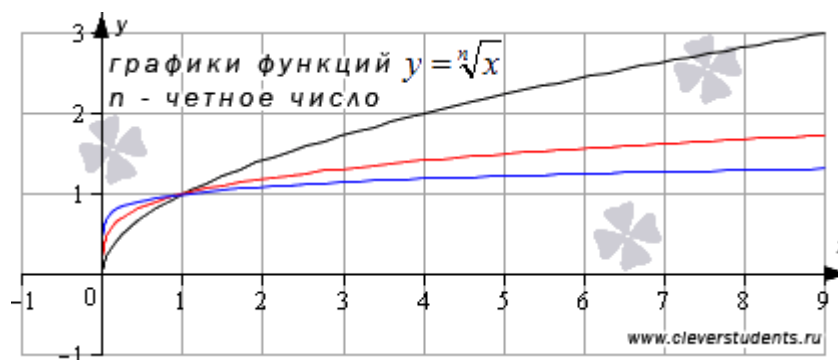
### Корень $n$ -ой степени.

Рассмотрим основную элементарную функцию, которая задается формулой  $y = \sqrt[n]{x}$ , где  $n$  – натуральное число, большее единицы.

Корень  $n$ -ой степени,  $n$  - четное число.

Начнем с функции корень  $n$ -ой степени при четных значениях показателя корня  $n$ .

Для примера приведем рисунок с изображениями графиков функций  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt[4]{x}$  и  $y = \sqrt[8]{x}$ , им соответствуют черная, красная и синяя линии.



Аналогичный вид имеют графики функций корень четной степени при других значениях показателя.

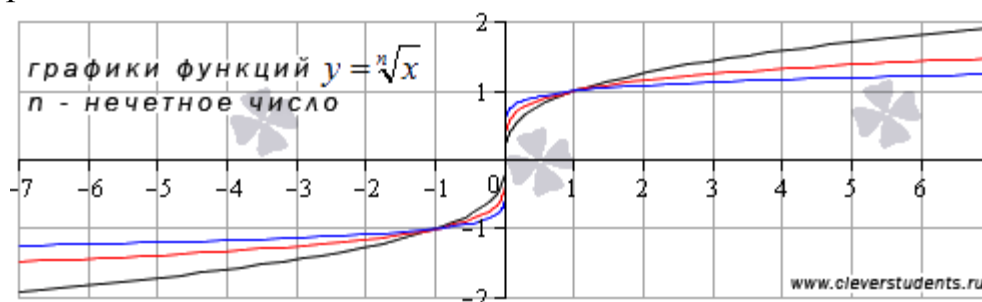
### Свойства функции корень $n$ -ой степени при чётных $n$ .

- Область определения: множество всех неотрицательных действительных чисел  $[0, +\infty)$ .
- При  $x=0$  функция  $y = \sqrt[n]{x}$  принимает значение, равное нулю.
- Эта функция общего вида (не является четной или нечетной).
- Область значений функции:  $[0, +\infty)$ .
- Функция  $y = \sqrt[n]{x}$  при четных показателях корня возрастает на всей области определения.
- Эта функция имеет выпуклость, направленную вверх, на всей области определения, точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- График функции корень  $n$ -ой степени при четных  $n$  проходит через точки  $(0,0)$  и  $(1,1)$ .

Корень  $n$ -ой степени,  $n$  - нечетное число.

Функция корень  $n$ -ой степени с нечетным показателем корня  $n$  определена на всем множестве действительных чисел. Для примера приведем графики

функций  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = \sqrt[5]{x}$  и  $y = \sqrt[9]{x}$ , им соответствуют черная, красная и синяя кривые.



При других нечетных значениях показателя корня графики функции  $y = \sqrt[n]{x}$  будут иметь схожий вид.

### Свойства функции корень $n$ -ой степени при нечетных $n$ .

- Область определения: множество всех действительных чисел.
- Эта функция нечетная.
- Область значений функции: множество всех действительных чисел.
- Функция  $y = \sqrt[n]{x}$  при нечетных показателях корня возрастает на всей области определения.
- Эта функция вогнутая на промежутке  $(-\infty, 0]$  и выпуклая на промежутке  $[0, +\infty)$ , точка с координатами  $(0,0)$  – точка перегиба.
- Асимптот нет.
- График функции корень  $n$ -ой степени при нечетных  $n$  проходит через точки  $(-1,-1)$ ,  $(0,0)$  и  $(1,1)$ .

### Степенная функция

Степенная функция задается формулой вида  $y = x^a$ .

Рассмотрим вид графиков степенной функции и свойства степенной функции в зависимости от значения показателя степени.

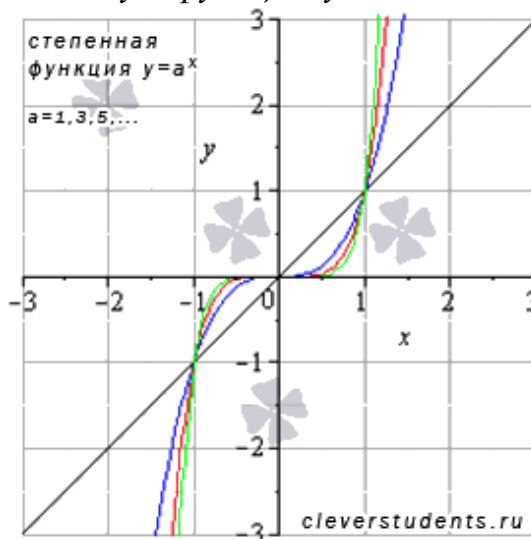
Начнем со степенной функции с целым показателем  $a$ . В этом случае вид графиков степенных функций и свойства функций зависят от четности или нечетности показателя степени, а также от его знака. Поэтому сначала рассмотрим степенные функции  $y = x^a$  при нечетных положительных значениях показателя  $a$ , далее - при четных положительных, далее - при нечетных отрицательных показателях степени, и, наконец, при четных отрицательных  $a$ .

Свойства степенных функций с дробными и иррациональными показателями (как и вид графиков таких степенных функций) зависят от значения показателя  $a$ . Их будем рассматривать, во-первых, при  $a$  от нуля до единицы, во-вторых, при  $a$  больших единицы, в-третьих, при  $a$  от минус единицы до нуля, в-четвертых, при  $a$  меньших минус единицы. В заключении этого пункта для полноты картины опишем степенную функцию с нулевым показателем.

Степенная функция с нечетным положительным показателем.

Рассмотрим степенную функцию  $y = x^a$  при нечетном положительном показателе степени, то есть, при  $a=1,3,5,\dots$

На рисунке ниже приведены графики степенных функций  $y = x$  – черная линия,  $y = x^3$  – синяя линия,  $y = x^5$  – красная линия,  $y = x^7$  – зеленая линия. При  $a=1$  имеем *линейную функцию*  $y=x$ .



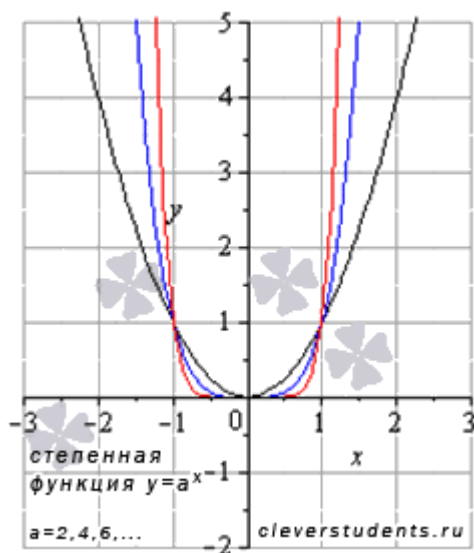
**Свойства степенной функции с нечетным положительным показателем.**

- Область определения:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- Область значений:  $y \in (-\infty; +\infty)$ .
- Функция нечетная, так как  $y(-x) = -y(x)$ .
- Функция возрастает при  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- Функция выпуклая при  $x \in (-\infty; 0]$  и вогнутая при  $x \in [0; +\infty)$  (кроме линейной функции).
- Точка  $(0;0)$  является точкой перегиба (кроме линейной функции).
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки  $(-1;-1)$ ,  $(0;0)$ ,  $(1;1)$ .

**Степенная функция с четным положительным показателем.**

Рассмотрим степенную функцию  $y = x^a$  с четным положительным показателем степени, то есть, при  $a=2,4,6,\dots$

В качестве примера приведем графики степенных функций  $y = x^2$  – черная линия,  $y = x^4$  – синяя линия,  $y = x^8$  – красная линия. При  $a=2$  имеем квадратичную функцию, графиком которой является *квадратичная парабола*.

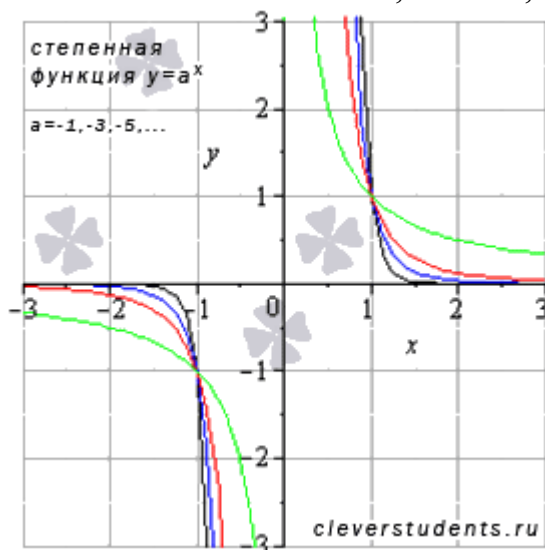


### Свойства степенной функции с четным положительным показателем.

- Область определения:  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- Область значений:  $y \in [0; +\infty)$ .
- Функция четная, так как  $y(-x) = y(x)$ .
- Функция возрастает при  $x \in [0; +\infty)$ , убывает при  $x \in (-\infty; 0]$ .
- Функция вогнутая при  $x \in (-\infty; +\infty)$ .
- Точек перегиба нет.
- Асимптот нет.
- Функция проходит через точки  $(-1; 1)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(1; 1)$ .

### Степенная функция с нечетным отрицательным показателем.

Посмотрите на графики степенной функции  $y = x^a$  при нечетных отрицательных значениях показателя степени, то есть, при  $a = -1, -3, -5, \dots$



На рисунке в качестве примеров показаны графики степенных

функций  $y = x^{-9}$  – черная линия,  $y = x^{-5}$  – синяя линия,  $y = x^{-3}$  – красная

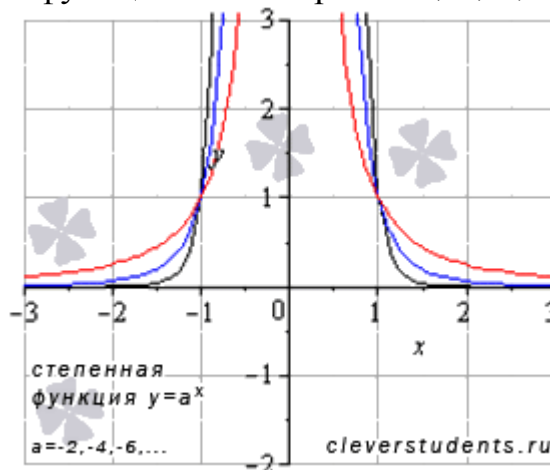
линия,  $y = x^{-1}$  – зеленая линия. При  $a = -1$  имеем *обратную пропорциональность*, графиком которой является *гипербола*.

### Свойства степенной функции с нечетным отрицательным показателем.

- Область определения:  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .  
При  $x=0$  имеем разрыв второго рода, так  
как  $\lim_{x \rightarrow 0-0} x^a = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^a = +\infty$  при  $a = -1, -3, -5, \dots$ . Следовательно, прямая  $x=0$  является вертикальной асимптотой.
- Область значений:  $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
- Функция нечетная, так как  $y(-x) = -y(x)$ .
- Функция убывает при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
- Функция выпуклая при  $x \in (-\infty; 0)$  и вогнутая при  $x \in (0; +\infty)$ .
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая  $y = 0$ , так как  
 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{x} = 0$ ,  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^a - kx) = 0 \Rightarrow$   
 $y = kx + b = 0$   
при  $a = -1, -3, -5, \dots$
- Функция проходит через точки  $(-1; -1)$ ,  $(1; 1)$ .

### Степенная функция с четным отрицательным показателем.

Перейдем к степенной функции  $y = x^a$  при  $a = -2, -4, -6, \dots$



На рисунке изображены графики степенных функций  $y = x^{-8}$  – черная линия,  $y = x^{-4}$  – синяя линия,  $y = x^{-2}$  – красная линия.

### Свойства степенной функции с четным отрицательным показателем.

- Область определения:  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .  
При  $x=0$  имеем разрыв второго рода, так  
как  $\lim_{x \rightarrow 0-0} x^a = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^a = +\infty$  при  $a = -2, -4, -6, \dots$ . Следовательно, прямая  $x=0$  является вертикальной асимптотой.

- Область значений:  $y \in (0; +\infty)$ .
- Функция четная, так как  $y(-x) = y(x)$ .
- Функция возрастает при  $x \in (-\infty; 0)$ , убывает при  $x \in (0; +\infty)$ .
- Функция вогнутая при  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ .
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая  $y=0$ , так как

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^a - kx) = 0 \Rightarrow$$

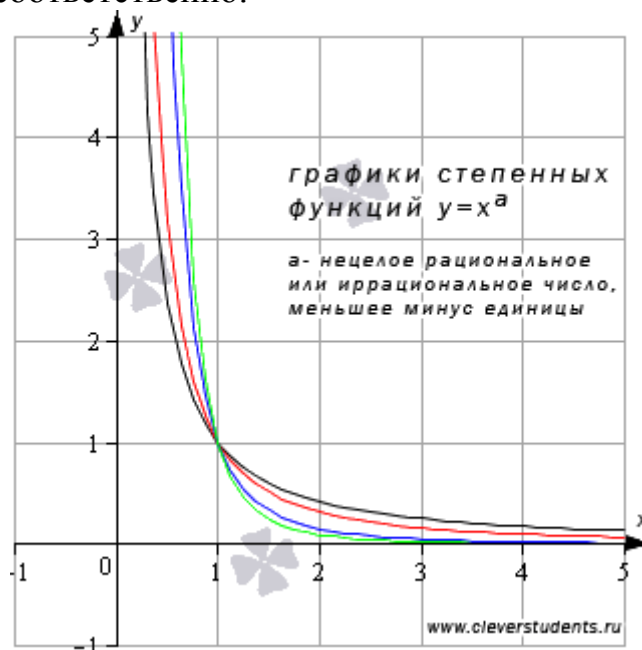
$$y = kx + b = 0$$

при  $a = -2, -4, -6, \dots$

- Функция проходит через точки  $(-1; 1), (1; 1)$ .

Степенная функция с нецелым действительным показателем, который меньше минус единицы.

Приведем примеры графиков степенных функций  $y = x^a$  при  $a = x^{-\frac{5}{4}}, y = x^{-\frac{5}{3}}, y = x^{-e}, y = x^{-\frac{27}{4}}$ , они изображены черной, красной, синей и зеленой линиями соответственно.



### Свойства степенной функции с нецелым отрицательным показателем, меньшим минус единицы.

- Область определения:  $x \in (0; +\infty)$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^a = +\infty$  при  $a < -1$ , следовательно,  $x=0$  является вертикальной асимптотой.
- Область значений:  $y \in (0; +\infty)$ .
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция убывает при  $x \in (0; +\infty)$ .



- Функция вогнутая при  $x \in (0; +\infty)$ .
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая  $y=0$ .
- Функция проходит через точку  $(1;1)$ .

При  $a=0$  и  $x \neq 0$  имеем функцию  $y = x^0 = 1$  - это прямая из которой исключена точка  $(0;1)$  (выражению  $0^0$  условились не придавать никакого значения).