Занятие№40

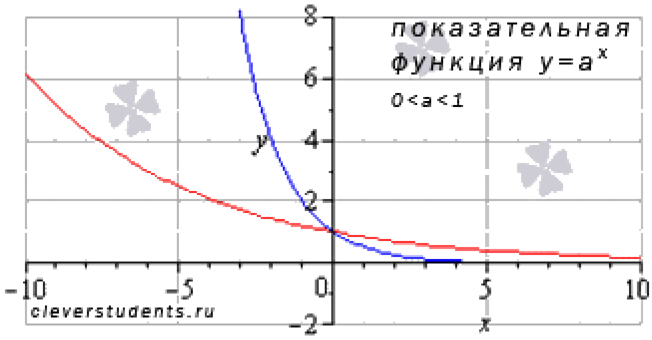
Последний лекционный материал по функциям. Здесь повторяются тригонометрические функции (я не стала их вырезать). Обратите внимание на обратные тригонометрические функции.

Сделайте весь конспект по всем функциям, графики чертить только карандашом. Занесите функции в таблицу, в таблице должны быть: тригонометрические функции, степенные, показательные, логарифмические. Обратные тригонометрические функции – по желанию. В следующем занятии (№43) будет тренировочный по математике

Показательные функции

Одной из основных элементарных функций является показательная функция. График показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$ принимает различный вид в зависимости от значения основания *a*. Разберемся в этим. Сначала рассмотрим случай, когда основание показательной функции принимает значение от нуля до единицы, то есть, $0 < a < 1$.

Для примера приведем графики показательной функции при *a = 1/2* – синяя линия,*a = 5/6* – красная линия. Аналогичный вид имеют графики показательной функции при других значениях основания из интервала $0 < a < 1$.

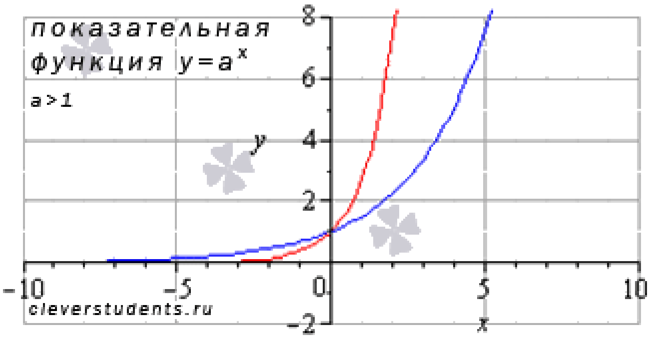


Свойства показательной функции с основанием меньшим единицы.

- Областью определения показательной функции является все множество действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in (0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Показательная функция, основание которой меньше единицы, убывает на всей области определения.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая *y = 0* при *x* стремящемся к плюс бесконечности.
- Функция проходит через точку *(0;1)*.

Переходим к случаю, когда основание показательной функции больше единицы, то есть, $a > 1$.

В качестве иллюстрации приведем графики показательных функций $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ – синяя линия и $y = e^x$ – красная линия. При других значениях основания, больших единицы, графики показательной функции будут иметь схожий вид.

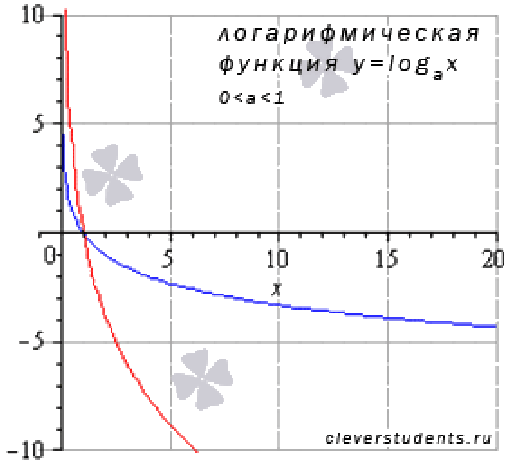


Свойства показательной функции с основанием большим единицы.

- Область определения показательной функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений: $y \in (0; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Показательная функция, основание которой больше единицы, возрастает при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$ при x стремящемся к минус бесконечности.
- Функция проходит через точку $(0;1)$.

Логарифмическая функция.

Следующей основной элементарной функцией является логарифмическая функция $y = \log_a(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Логарифмическая функция определена лишь для положительных значений аргумента, то есть, при $x \in (0;+\infty)$.
График логарифмической функции принимает различный вид в зависимости от значения основания a.
Начнем со случая, когда $0 < a < 1$.
Для примера приведем графики логарифмической функции при $a = 1/2$ – синяя линия, $a = 5/6$ – красная линия. При других значениях основания, не превосходящих единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.

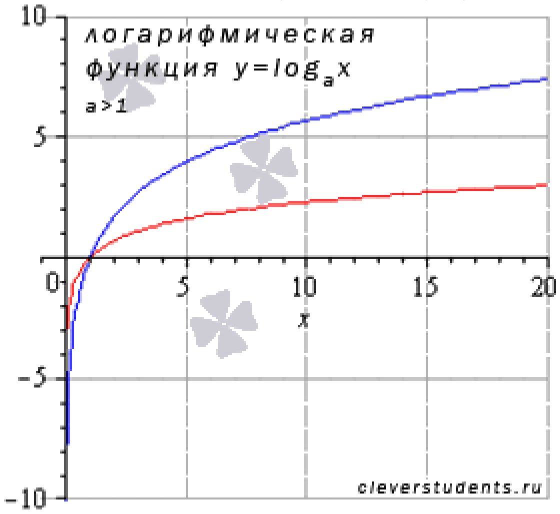


Свойства логарифмической функции с основанием меньшим единицы.

- Область определения логарифмической функции: $x \in (0;+\infty)$.
  При x стремящемся к нулю справа, значения функции стремятся к плюс бесконечности.
- Область значений: $y \in (-\infty;+\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Логарифмическая функция убывает на всей области определения.
- Функция вогнутая при $x \in (0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальных асимптот нет.
- Функция проходит через точку *(1;0)*.

Перейдем к случаю, когда основание логарифмической функции больше единицы ($a > 1$).

Покажем графики логарифмических функций $y = \log_{\frac{3}{2}} x$ – синяя линия, $y = \ln x$ – красная линия. При других значениях основания, больших единицы, графики логарифмической функции будут иметь схожий вид.



Свойства логарифмической функции с основанием большим единицы.

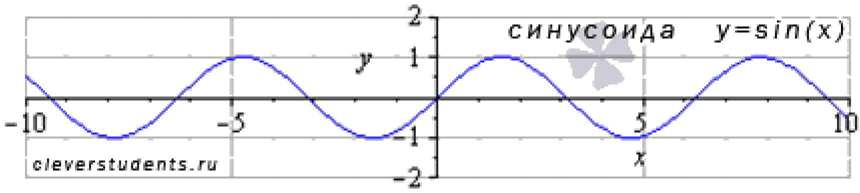
- Область определения: $x \in (0;+\infty)$. При *x* стремящемся к нулю справа, значения функции стремятся к минус бесконечности.
- Областью значений логарифмической функции является все множество действительных чисел, то есть, интервал $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция не является ни четной, ни нечетной, то есть она общего вида.
- Функция возрастает при $x \in (0;+\infty)$.
- Функция выпуклая при $x \in (0;+\infty)$.
- Точек перегиба нет.
- Горизонтальных асимптот нет.
- Функция проходит через точку *(1;0)*.

Тригонометрические функции, их свойства и графики.

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.
Тригонометрическим функциям присуще
понятие *периодичности* (повторяемости значений функции при различных значениях аргумента, отличных друг от друга на величину периода $f(x+T)=f(x)$, где T - период), поэтому, в список свойств тригонометрических функций добавлен пункт *«наименьший положительный период»*. Также для каждой тригонометрической функции мы укажем значения аргумента, при которых соответствующая функция обращается в ноль.

Функция *y = sin x*.

Изобразим график функции синус, его называют "синусоида".



Свойства функции *y = sin x*.

- Областью определения функции синус является все множество действительных чисел, то есть, функция *y = sinx* определена при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции синуса равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$, *Z* – множество целых чисел.
- Функция синус принимает значения из интервала от минус единицы до единицы включительно, то есть, ее область значений есть $y \in [-1; 1]$.

- Функция синус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$,

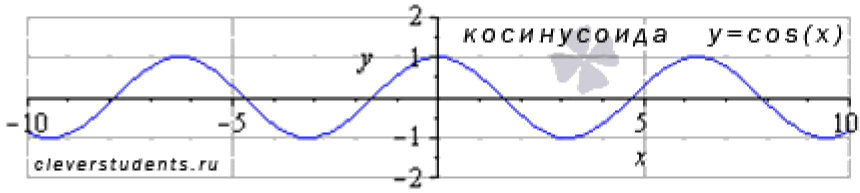
  возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Функция синус имеет локальные максимумы в точках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; 1\right)$,

  локальные минимумы в точках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot k; -1\right), \quad k \in Z$.
- Функция *y* = *sinx* вогнутая при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$,

  выпуклая при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k; 0), \quad k \in Z$.
- Асимптот нет.

Функция *y* = *cos x*.

График функции косинус (его называют "косинусоида") имеет вид:



Свойства функции *y* = *cosx*.

- Область определения функции косинус: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Наименьший положительный период функции *y* = *cosx* равен двум пи: $T = 2\pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$, *Z* – множество целых чисел.
- Область значений функции косинус представляет интервал от минус единицы до единицы включительно: $y \in [-1; 1]$.
- Функция косинус - четная, так как $y(-x) = y(x)$.
- Функция убывает при $x \in [2\pi \cdot k; \pi + 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$,

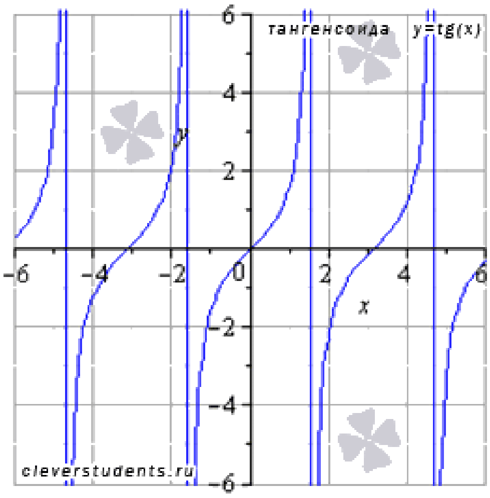
  возрастает при $x \in [-\pi + 2\pi \cdot k; 2\pi \cdot k], \quad k \in Z$.
- Функция *y* = *cosx* имеет локальные максимумы в точках $(2\pi \cdot k; 1), \quad k \in Z$,

  локальные минимумы в точках $(\pi + 2\pi \cdot k; -1), \quad k \in Z$.

- Функция вогнутая при $x \in \left[\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k; \frac{3\pi}{2}+2\pi\cdot k\right], \quad k \in Z$,
  выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k; \frac{\pi}{2}+2\pi\cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k; 0\right), \quad k \in Z$.
- Асимптот нет.

Функция *y = tg x*.

График функции тангенс (его называют "тангенсоида") имеет вид:



Свойства функции тангенс *y = tgx*.

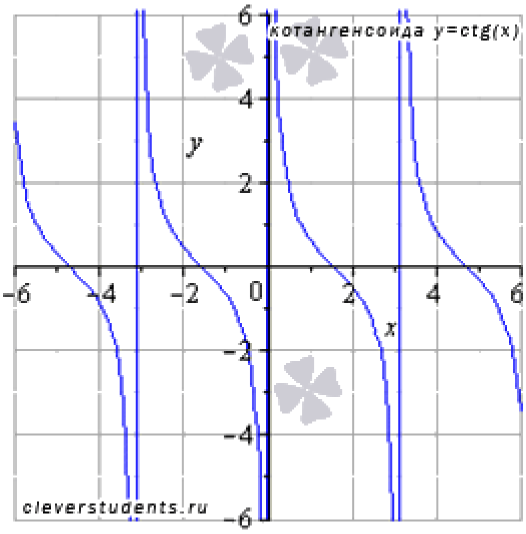
- Область определения функции тангенс: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k; \frac{\pi}{2}+\pi\cdot k\right)$,
  где $k \in Z$, *Z* – множество целых чисел.
  Поведение функции *y = tgx* на границе области определения $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+\pi\cdot k+0} tg(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+\pi\cdot k-0} tg(x) = +\infty$
  Следовательно, прямые $x = \frac{\pi}{2}+\pi\cdot k$, где $k \in Z$, являются вертикальными асимптотами.
- Наименьший положительный период функции тангенс $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \pi\cdot k$, где $k \in Z$, *Z* – множество целых чисел.
- Область значений функции *y = tgx*: $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция тангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция возрастает при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k; \frac{\pi}{2}+\pi\cdot k\right), \quad k \in Z$.

- Функция вогнутая при $x \in \left[\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right), \quad k \in Z$,

  выпуклая при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k\right], \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $(\pi \cdot k;\ 0), \quad k \in Z$.
- Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

Функция *y = ctg x*.

Изобразим график функции котангенс (его называют "котангенсоида"):



Свойства функции котангенс *y = ctgx*.

- Область определения функции котангенс: $x \in (\pi \cdot k;\ \pi + \pi \cdot k)$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.

  Поведение на границе области определения $\lim\limits_{x \to \pi \cdot k + 0} tg(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to \pi \cdot k - 0} tg(x) = -\infty$

  Следовательно, прямые $x = \pi \cdot k$, где $k \in Z$ являются вертикальными асимптотами.
- Наименьший положительный период функции *y = ctgx* равен пи: $T = \pi$.
- Функция обращается в ноль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, где $k \in Z$, Z – множество целых чисел.
- Область значений функции котангенс: $y \in (-\infty;\ +\infty)$.
- Функция нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция *y = ctgx* убывает при $x \in (\pi \cdot k;\ \pi + \pi \cdot k), \quad k \in Z$.

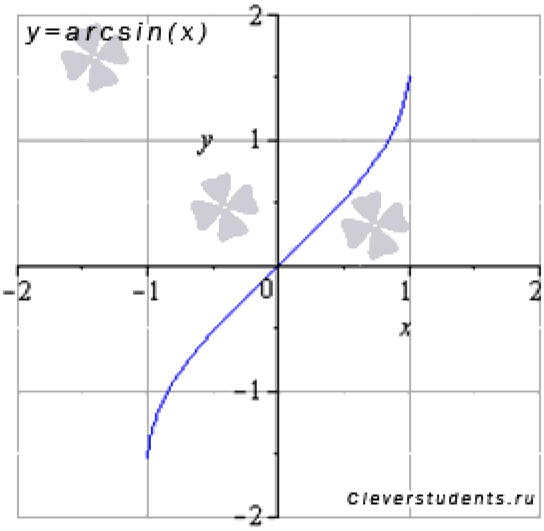
- Функция котангенс вогнутая при $x \in \left(\pi \cdot k; \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right], \quad k \in Z$, выпуклая при $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; \pi \cdot k\right), \quad k \in Z$.
- Координаты точек перегиба $\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k; 0\right), \quad k \in Z$.
- Наклонных и горизонтальных асимптот нет.

Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс) являются основным элементарным функциями. Часто из-за приставки "арк" обратные тригонометрические функции называют аркфункциями. Сейчас мы рассмотрим их графики и перечислим свойства.

Функция арксинус *y = arcsin(x)*.

Изобразим график функции арксинус:

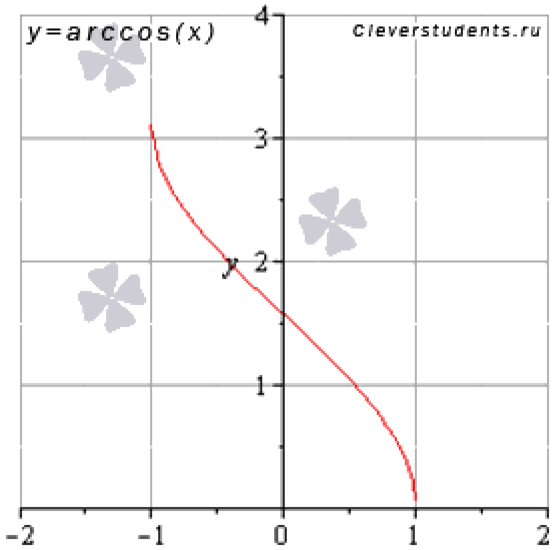


Свойства функции арксинус *y = arcsin(x)*.

- Областью определения функции арксинус является интервал от минус единицы до единицы включительно: $x \in [-1; 1]$.
- Область значений функции *y = arcsin(x)*: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Функция арксинус - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.
- Функция *y = arcsin(x)* возрастает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1; 1]$.
- Функция вогнутая при $x \in [0; 1]$, выпуклая при $x \in [-1; 0]$.
- Точка перегиба *(0; 0)*, она же ноль функции.
- Асимптот нет.

Функция арккосинус *y = arccos(x)*.

График функции арккосинус имеет вид:

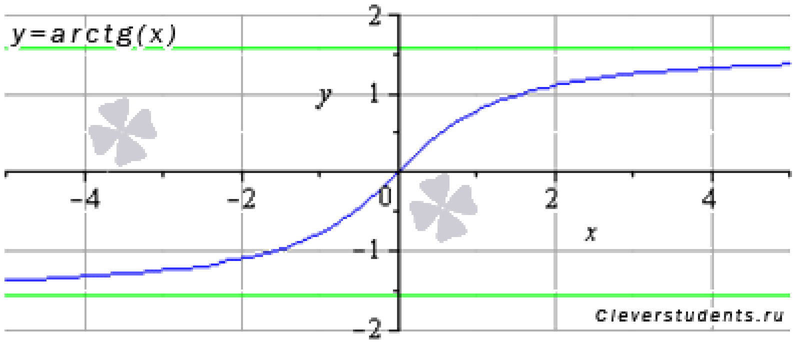


Свойства функции арккосинус $y = arccos(x)$.

- Область определения функции арккосинус: $x \in [-1; 1]$.
- Область значений функции $y = arccos(x)$: $y \in [0; \pi]$.
- Функция не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Функция арккосинус убывает на всей области определения, то есть, при $x \in [-1; 1]$.
- Функция вогнутая при $x \in [-1; 0]$, выпуклая при $x \in [0; 1]$.
- Точка перегиба $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Асимптот нет.

Функция арктангенс $y = arctg(x)$.

График функции арктангенс имеет вид:



Свойства функции арктангенс $y = arctg(x)$.

- Область определения функции $y = arctg(x)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений функции арктангенс: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Функция арктангенс - нечетная, так как $y(-x) = -y(x)$.

- Функция возрастает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция арктангенс вогнутая при $x \in (-\infty; 0]$, выпуклая при $x \in [0; +\infty)$.
- Точка перегиба *(0; 0)*, она же ноль функции.
- Горизонтальными асимптотами являются прямые $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$ и $y = \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$. На чертеже они показаны зеленым цветом.

Функция арккотангенс *y = arcctg(x)*.

Изобразим график функции арккотангенс:

Свойства функции арккотангенс *y = arcctg(x)*.

- Областью определения функции арккотангенс является все множество действительных чисел: $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Область значений функции *y = arcctg(x)*: $y \in (0; \pi)$.
- Функция арккотангенс не является ни четной ни нечетной, то есть, она общего вида.
- Функция убывает на всей области определения, то есть, при $x \in (-\infty; +\infty)$.
- Функция вогнутая при $x \in [0; +\infty)$, выпуклая при $x \in (-\infty; 0]$.
- Точка перегиба $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Горизонтальными асимптотами являются прямые $y = \pi$ при $x \to -\infty$ (на чертеже показана зеленым цветом) и *y = 0* при $x \to +\infty$

Преобразования аргумента.

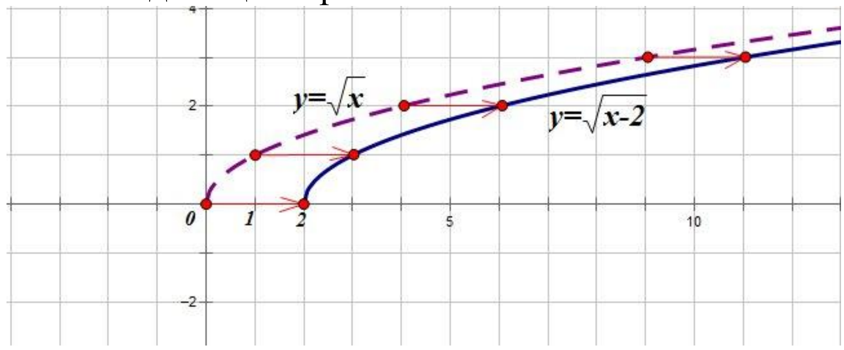
1. f(x) → f(x+b)

1. Строим график фунции $y = f(x)$
2. Сдвигаем график фунции $y = f(x)$ вдоль оси OX на |b| единиц
   - влево, если b>0
   - вправо, если b<0

Построим график функции $y=\sqrt{x-2}$

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}$

2. Сдвигаем его на 2 единицы вправо:



2. f(x) → f(kx)

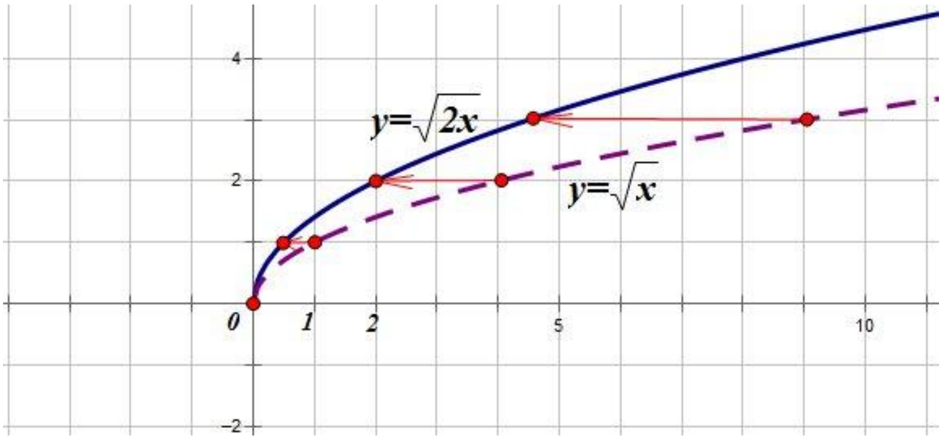
1. Строим график фунции $y=f\left(x\right)$

2. Абсциссы точек графика $y=f\left(x\right)$ делим на к, ординаты точек оставляем без изменений.

Построим график функции $y=\sqrt{2x}$.

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}$

2. Все абсциссы точек графика $y=\sqrt{2x}$ делим на 2, ординаты оставляем без изменений:



3. f(x) → f(-x)

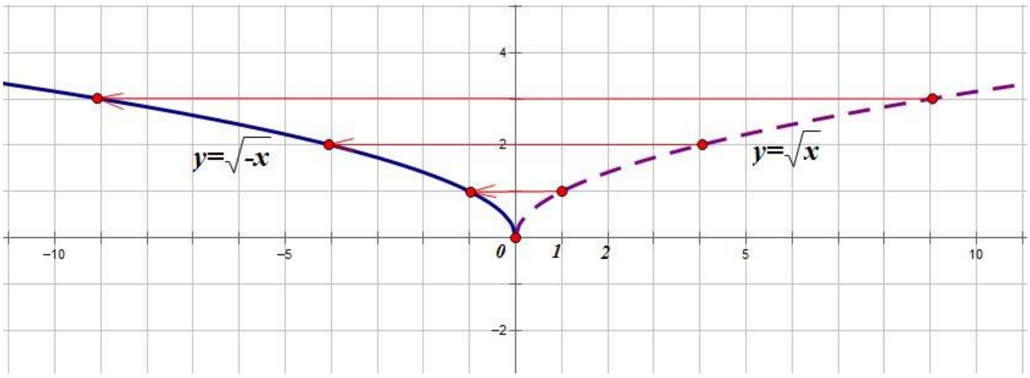
1. Строим график фунции $y=f\left(x\right)$

2. Отображаем его симметрично относительно оси OY.

Построим график функции $y=\sqrt{-x}$.

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}$

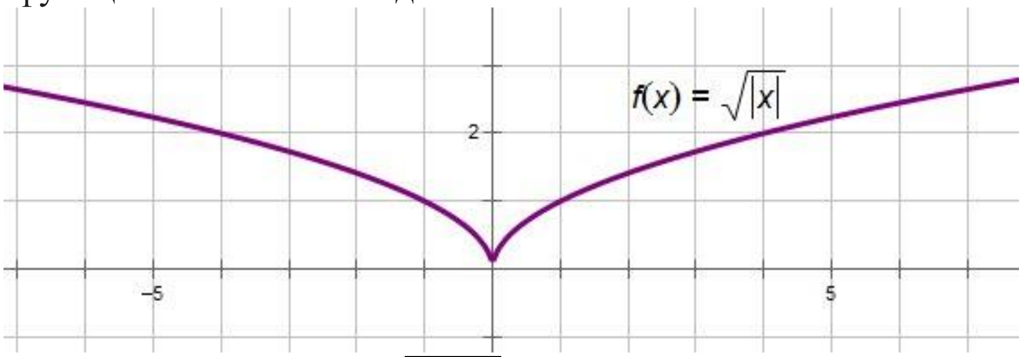
2. Отображаем его симметрично относительно оси OY:



4. **f(x) → f(|x|)**

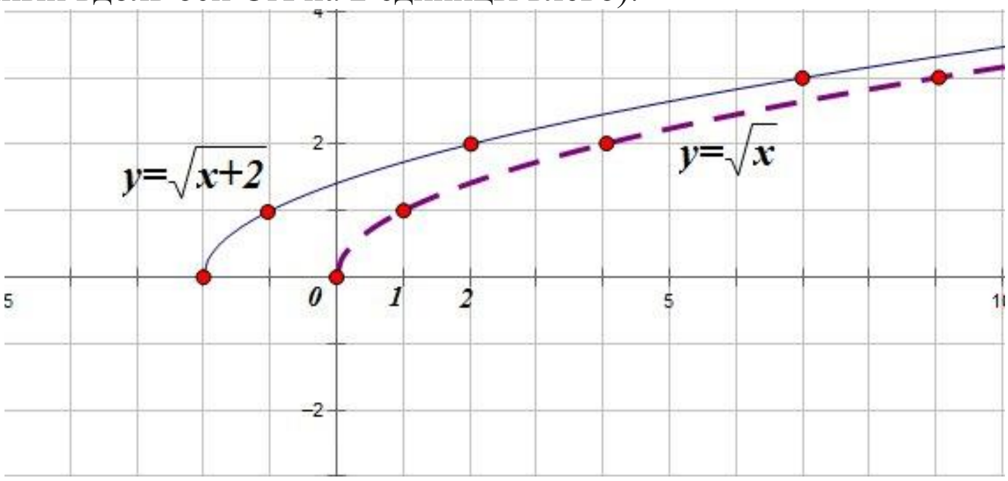
1. Строим график функции $y=f(x)$
2. Часть графика, расположенную левее оси OY стираем, часть графика, расположенную правее оси OY Достраиваем симметрично относительно оси OY:

График функции $y=\sqrt{|x|}$ выглядит так:

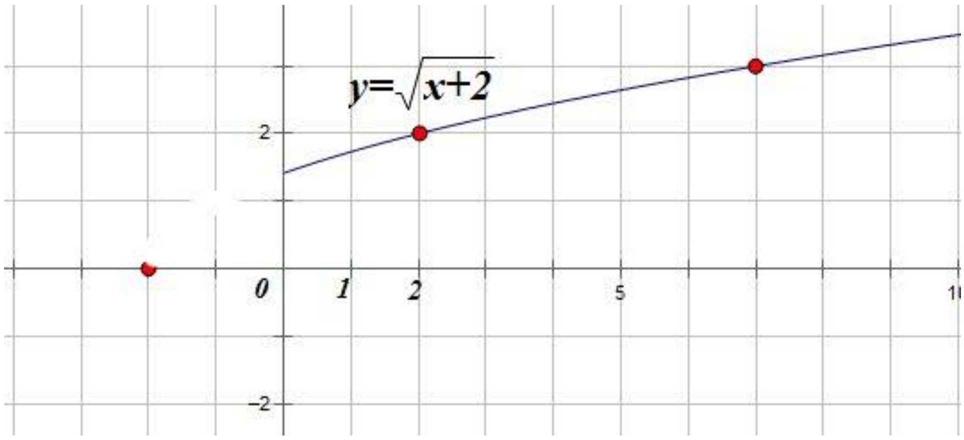


Построим график функции $y=\sqrt{|x|+2}$

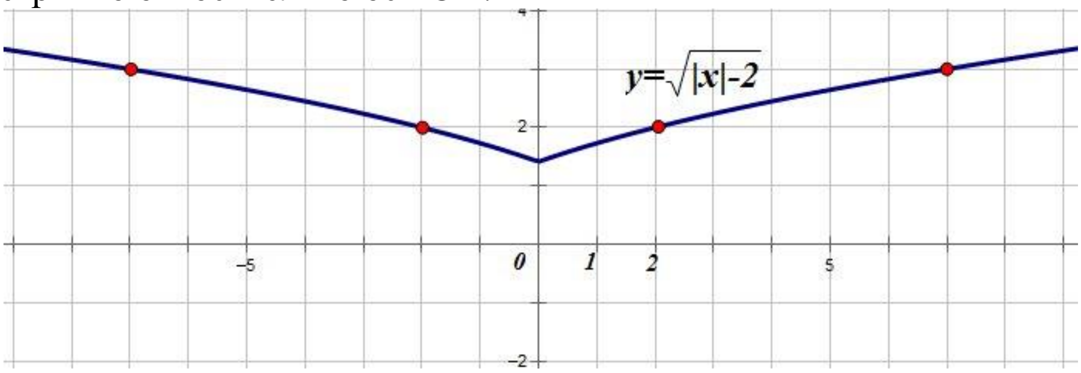
1. Строим график функции $y=\sqrt{x+2}$ (это график функции $y=\sqrt{x}$, смещенный вдоль оси OX на 2 единицы влево):



2. Часть графика, расположенную левее оси OY (x<0) стираем:



3. Часть графика, расположенную правее оси OY (x>0) достраиваем симметрично относительно оси OY:



Теперь поговорим о **преобразовании функции**.

Преобразования совершаются

1. Вдоль оси OY.
2. В той же последовательности, в какой выполняются действия.

Вот эти преобразования:

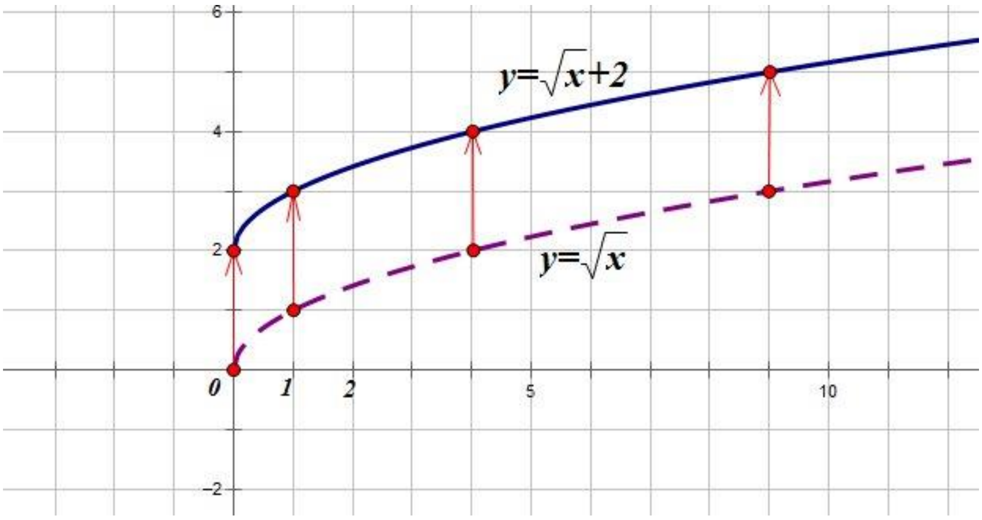
1. f(x)→f(x)+D

1. Строим график функции y=f(x)
2. Смещаем его вдоль оси OY на |D| единиц

- вверх, если D>0
- вниз, если D<0

Построим график функции $y=\sqrt{x}+2$

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}$
2. Смещаем его вдоль оси OY на 2 единицы вверх:

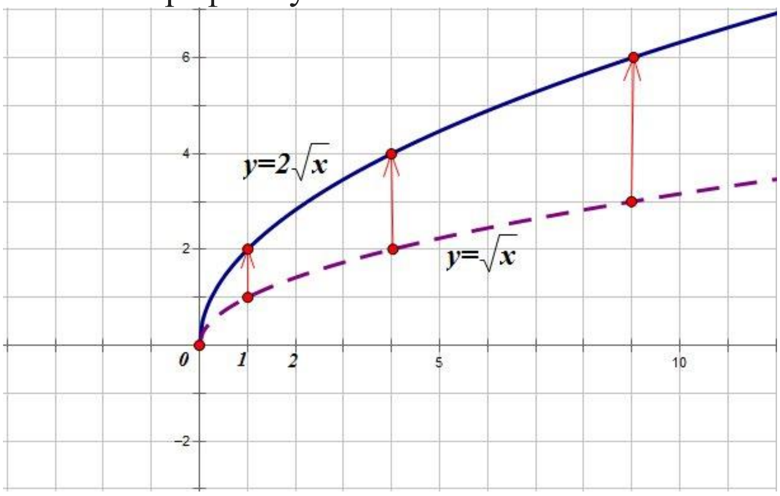


2. f(x) → Af(x)

1. Строим график функции y=f(x)
2. Ординаты всех точек графика умножаем на A, абсциссы оставляем без изменений.

Построим график функции $y=2\sqrt{x}$

1. Построим график функции $y=\sqrt{x}$
2. Ординаты всех точек графика умножим на 2:

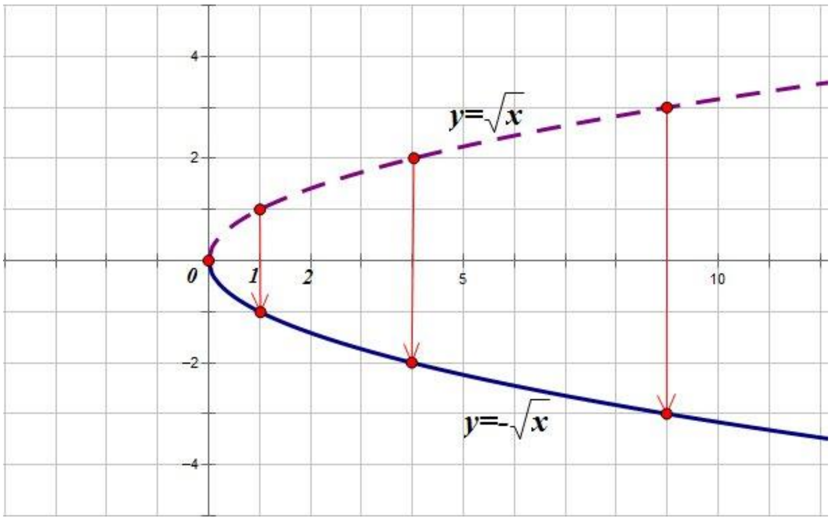


3. f(x) → -f(x)

1. Строим график функции y=f(x)
2. Отображаем его симметрично относительно оси OX.

Построим график функции $y=-\sqrt{x}$.

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}$.
2. Отображаем его симметрично относительно оси OX.

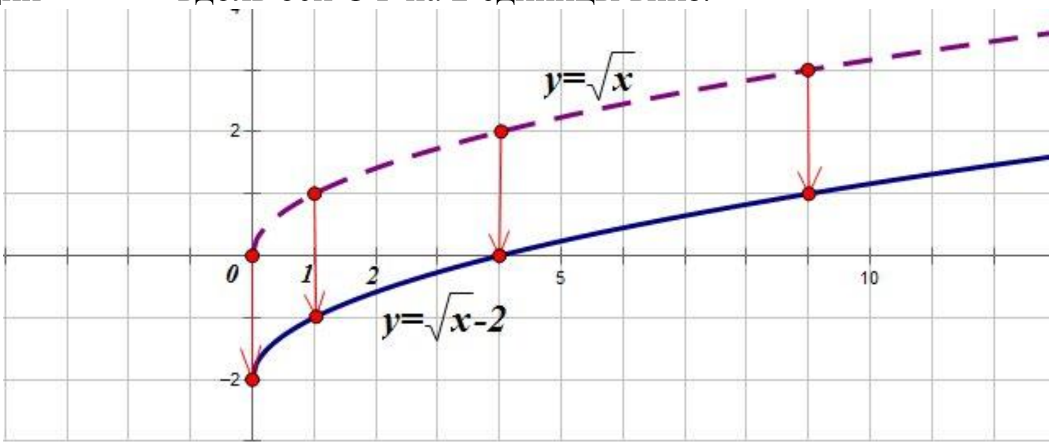


4. f(x)→|f(x)|

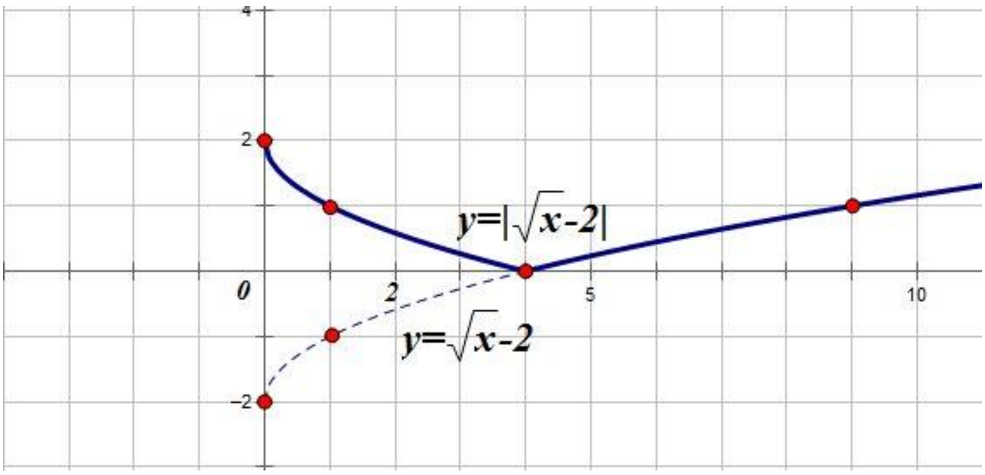
1. Строим график функции y=f(x)
2. Часть графика, расположенную выше оси OX оставляем без изменений, часть графика, расположенную ниже оси OX, отображаем симметрично относительно этой оси.

Построим график функции $y=\left|\sqrt{x}-2\right|$

1. Строим график функции $y=\sqrt{x}-2$. Он получается смещением графика функции $y=\sqrt{x}$ вдоль оси OY на 2 единицы вниз:



2. Теперь часть графика, расположенную ниже оси OX, отобразим симметрично относительно этой оси:



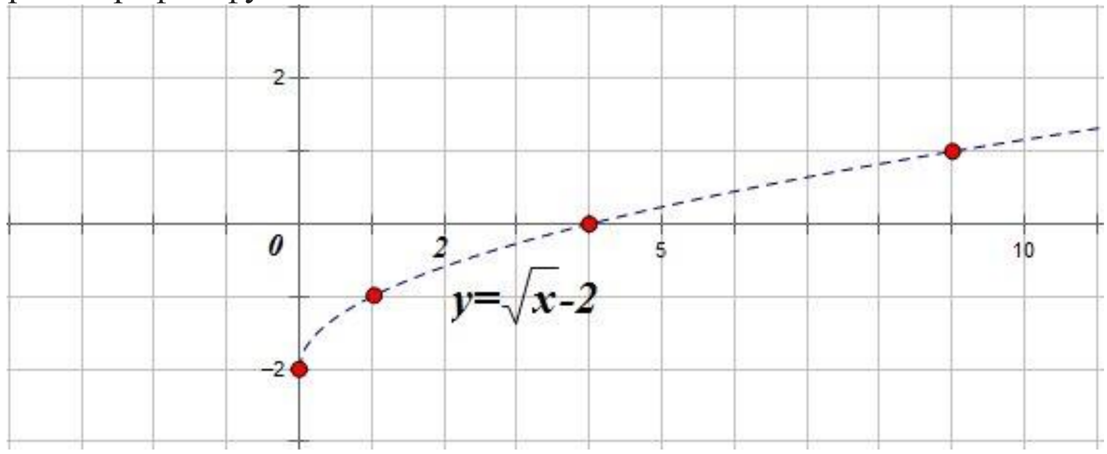
И последнее преобразование, которое, строго говоря, нельзя назвать преобразованием функции, поскольку результат этого преобразования функцией уже не является:

$y=f(x) \rightarrow |y|=f(x)$

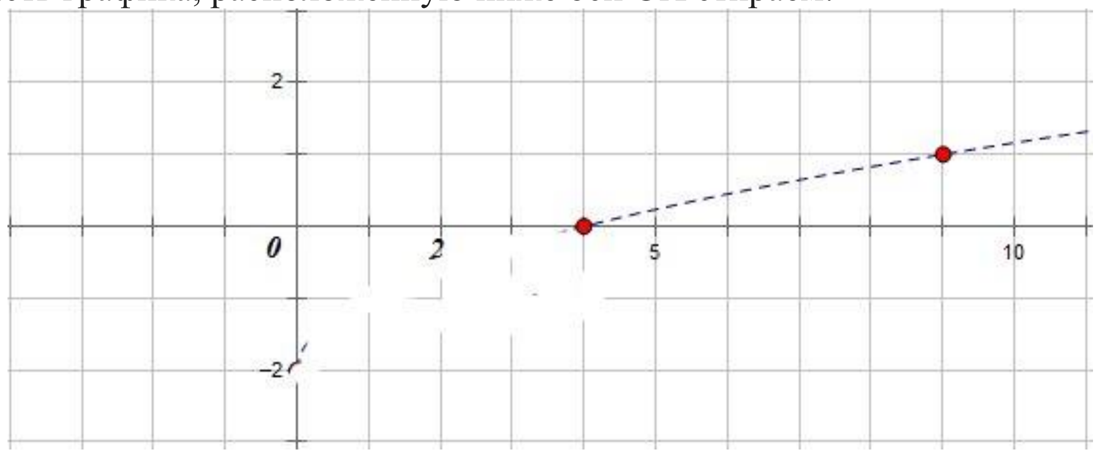
1. Строим график функции y=f(x)
2. Часть графика, расположенную ниже оси OX стираем, затем часть графика, расположенную выше оси OX достраиваем симметрично относительно этой оси.

Построим график уравнения $|y|=\sqrt{x}-2$

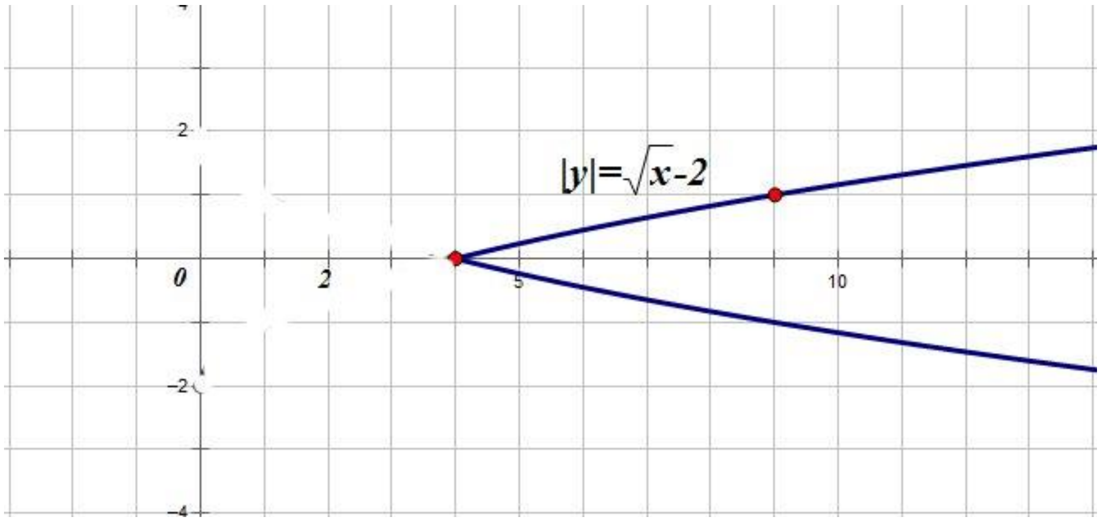
1. Строим график функции $y=\sqrt{x}-2$:



2. Часть графика, расположенную ниже оси OX стираем:



3. Часть графика, расположенную выше оси OX достраиваем симметрично относительно этой оси.



$|y|=\sqrt{x}-2$
0
2
5
10
2
-2
-4