Занятие 30.10.2021
(СВ22,СМ21,22)

Новая тема **Ряды,** сделать конспект, высылать не надо, на очном занятии сделаем практическое задание по этой теме, задания по теме **Ряды** будут на экзамене.

Числовые ряды. Знакопеременные ряды. Признаки сходимости Абсолютная и условная сходимость. Функциональные и степенные ряды. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Понятие о ряде Фурье

Числовые ряды. Знакопеременные ряды..

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

где $u_1; u_2; u_3; \ldots; u_i; \ldots$ - члены ряда; u_n - *n-ый* или общий член ряда, называется бесконечным рядом (рядом).

Если члены ряда :

- числа, то ряд называется числовым;
- числа одного знака, то ряд называется знакопостоянным;
- числа разных знаков, то ряд называется знакопеременным;
- положительные числа, то ряд называется знакоположительным;
- числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется знакочередующимся;
- функции, то ряд называется функциональным;
- степени x, то ряд называется степенным;
- тригонометрические функции, то ряд называется тригонометрическим.

I. Числовой ряд

1.1. Основные понятия числового ряда.

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1,$$
$$S_2 = u_1 + u_2,$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

…………..

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Признаки сходимости.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$.

Если при бесконечном возрастании номера *n* частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S - суммой сходящегося ряда, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) = S$.

1.2. Необходимый и достаточные признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда: *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *может сходиться только при условии, что его общий член* u_n *при неограниченном увеличении номера* n *стремится к нулю:* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится* – это достаточный признак расходимости ряда.
Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

Признак Даламбера.
Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \quad (u_n > 0)$$

выполняется условие $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.
Признак Даламбера не дает ответа, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

Степенной ряд
Степенной ряд с одной переменной — это формальное алгебраическое выражение вида:

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,$$

в котором коэффициенты a_n берутся из некоторого кольца R.