Занятие№4 « Применение производной»

Уважаемые курсанты, занятия№4, №5 запланированы на тему «Применение производной, мы изучали производную функции на 1 курсе, но сейчас не повторение, а изучение на более серьезном, техническом уровне. Будьте внимательны; сделайте конспект по занятию№4 и №5 в своей рабочей тетради. Я буду КРАЙНЕ удивлена, если у вас не будет конспекта на очных занятиях.
Высылать мне конспект не надо.

Тема 1.1. Основные понятия математического анализа

Производная функции, геометрический смысл.

Применение производной.

Производная функции, геометрический смысл.

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).Назовём $\Delta x = x - x_0$ приращением аргумента функции, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$приращением значения функции в точкеx_0.Тогда $f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрированием.

Формулы и правила дифференцирования

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(C)' = 0$$

$$(Cu)' = C(u)'$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим график функции $y=f(x)$:

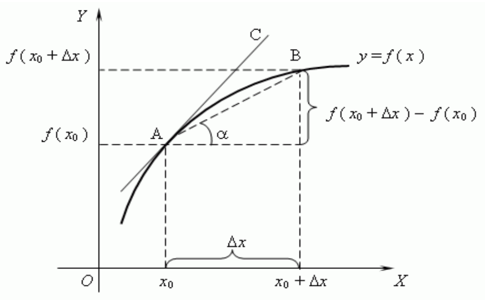

Рис. 1

Из рис.1 видно, что для любых двух точек А и В графика функции:$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{x\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}$,
где α-угол наклона секущей АВ.
Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку А и двигать по направлению к ней точку В, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая АВ приближается к касательной АС. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке А. Отсюда следует: *производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.* В этом и состоит *геометрический смысл* производной.
Уравнение касательной к графику функции в точке $A(x_0, f(x_0))$имеет вид:
$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Применение производной.

Механический смысл производной.
Рассмотрим простейший случай: движение материальной точки вдоль координатной оси, причём закон движения задан: координата *x* движущейся точки – известная функция *x (t)* времени *t*. В течение интервала времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ точка перемещается на расстояние: $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\Delta x$, а её *средняя скорость* равна: $v_a = \Delta x/\Delta t$.При $\Delta t\to 0$ значение средней скорости стремится к определённой величине, которая называется *мгновенной скоростью* $v\,(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0. Но по определению производной мы имеем:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x\,(t_0+\Delta t) - x\,(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0),$$

отсюда, $v(t_0)= x'(t_0)$,т.е. скорость – это производная координаты по времени. В этом и состоит механический смысл производной. Аналогично, ускорение – это производная скорости по времени: $a=v'(t)$.
Применение производной в исследовании функций
Достаточные признаки монотонности функции.
Если $f'(x)>0$в каждой точке интервала (a, b),то функция f (x)возрастает на этом интервале.

Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала (a, b), то функция f(x)убывает на этом интервале.

*Критические точки***.** Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки очень важны при анализе функции и построении её графика, потому что только в этих точках функция может иметь *экстремум* (*минимум* или *максимум*,рис.5*а*,*б*).

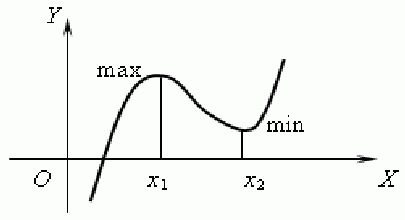

Рис. 5*а*

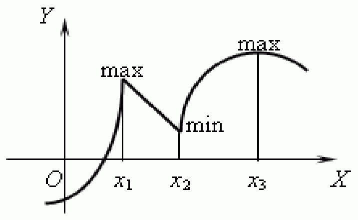

Рис. 5*б*

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) функции.

Пусть функция $f(x)$дважды дифференцируема (имеет *вторую* производную) на интервале (a, b), тогда:

Если $f''(x)>0$ для любого $x \in (a, b)$,то функция $f(x)$ является ***вогнутой*** на интервале (a, b); если $f''(x)<0$ для любого $x \in (a, b)$,то функция $f(x)$ является ***выпуклой*** на интервале (a, b).

Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*. Отсюда следует, что если в точке перегиба x_0существует вторая производная $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.