Занятие №7

Уважаемые курсанты, на 1 курсе у нас изучалась тема **Интегралы**, на 2 курсе эта тема изучается глубже, задания сложнее. В занятии №7 представлена теория по теме **Неопределенный интеграл.** Сделайте конспект или воспользуйтесь конспектом 1 курса для ответов на вопросы (отвечать на вопросы устно)

Первообразная. Неопределенный интеграл. Способы вычисления неопределенного интеграла.

Первообразная. Неопределённый интеграл.

Первообразная. Непрерывная функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для каждого $x \in X$

$F'(x)=f(x)$.

Неопределённый интеграл функции $f(x)$ на промежутке X есть *множество всех её первообразных*. Это записывается в виде:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

Где C–любая постоянная, называемая *постоянной интегрирования.*

Некоторые неопределённые интегралы от элементарных функций

$$\int dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$$

Основные свойства неопределённого интеграла

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную на промежутке X, и k– число, то

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Короче: *постоянную можно выносить за знак интеграла.*

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные на промежуткеX, то

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Короче: *интеграл суммы равен сумме интегралов.*

Методы интегрирования (Способы вычисления неопределенного интеграла.)

Интегрирование подстановкой (замена переменной).Если функция $f(z)$ определена и имеет первообразную при $z\in \boldsymbol{Z}$, а функция $z=g(x)$имеет непрерывную производную при $x \in \boldsymbol{X}$ и её область значений $g(\boldsymbol{X})\subset \boldsymbol{Z}$, то функция $F(x)=f[g(x)]\,g'(x)$ имеет первообразную на X и

$$\int F(x)dx=\int f[g(x)]\cdot g'(x)dx=\int f(z)dz.$$

П р и м е р.

Найти интеграл: $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Р е ш е н и е. Чтобы избавиться от квадратного корня, положим $\sqrt{x-3}=u$,тогда $x = u^2+3$и,следовательно, $dx = 2u\,du$. Делая подстановку, имеем:

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int(u^2+3)\,u\,2u\,du=\int(2u^4+6u^2)\,du=2u^5/5+2u^3=$$

$$=\frac{2(x-3)^{5/2}}{5}+2(x-3)^{3/2}+C.$$

Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные первые производные и существует интеграл $\int v(x)du(x)$,то существует и интеграл $\int u(x)dv(x)$и имеет место равенство:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x)$$

или в более короткой форме:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Обратите внимание, что интегрирование по частям и дифференциал произведения являются взаимно обратными операциями (проверьте!).

П р и м е р . Найти интеграл:, $\int \ln x\,dx$.

Р е ш е н и е. Предположим $u = \ln x$ и $dv=dx$, тогда $du=dx/x$ и $v=x$. Используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,dx/x = x\ln x - x + C.$$

Вопросы по теме:

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Запишите символами связь первообразной $F(x)$ с функцией $f(x)$.
3. Объясните понимание фразы: «Дифференцирование и интегрирование – взаимно обратные действия».
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. Прокомментируйте общепринятую символику: $S-?;\ f(x)-?;\ f(x)dx-?;x-?.$
6. Сформулируйте правило проверки действия отыскания интеграла.
7. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
8. Запишите формулу, лежащую в основе метода интегрирования «по частям».
9. Объясните идею метода интегрирования «по частям».
10. Составьте алгоритм метода интегрирования «по частям».
11. Объясните идею, понимание метода замены переменной, который применяется в математике.
12. Перечислите правила интегрирования (свойства неопределенного интеграла).
13. Вспомните общепринятое оформление примеров на отыскание интегралов методом подстановки (замены переменной).