

Занятие №20

Всем быть и работать на конференциях, иначе не будете аттестованы. Материал на сайт дается с учетом работы на конференции.

Новая тема **Ряды**, сделать конспект, готовиться к тесту. Напоминаю, в тесте будут неопределенные интегралы, диф. уравнения, немножко **Ряды**

Числовые ряды. Знакопеременные ряды. Признаки сходимости Абсолютная и условная сходимости. Функциональные и степенные ряды. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Понятие о ряде Фурье

Числовые ряды. Знакопеременные ряды..

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} u_i,$$

где $u_1; u_2; u_3; \dots; u_i; \dots$ - члены ряда; u_n - n -ый или общий член ряда, называется бесконечным рядом (рядом).

Если члены ряда :

- числа, то ряд называется числовым;
- числа одного знака, то ряд называется знакопостоянным;
- числа разных знаков, то ряд называется знакопеременным;
- положительные числа, то ряд называется знакоположительным;
- числа, знаки которых строго чередуются, то ряд называется знакочередующимся;
- функции, то ряд называется функциональным;
- степени x , то ряд называется степенным;
- тригонометрические функции, то ряд называется тригонометрическим.

I. Числовой ряд

1.1. Основные понятия числового ряда.

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

где $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член u_n называется общим членом ряда.

Суммы

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

составленные из первых членов ряда (1.1), называются частичными суммами этого ряда.

Признаки сходимости.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$.

Если при бесконечном возрастании номера n частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S , то ряд называется сходящимся, а число S - суммой сходящегося ряда, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n) = S$$

1.2. Необходимый и достаточные признаки сходимости.

Необходимый признак сходимости ряда: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится – это достаточный признак расходимости ряда. Достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами.

Признак Даламбера.

Если для ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots \quad (u_n > 0)$$

выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Признак Даламбера не дает ответа, если $l = 1$. В этом случае для исследования ряда применяются другие приемы.

Степенной ряд

Степенной ряд с одной переменной — это формальное алгебраическое выражение вида:

$$F(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n,$$

в котором коэффициенты a_n берутся из некоторого кольца R .