Занятие 23

Тема. Формулы сложения.

С этого занятия мы с вами начнем знакомиться с формулами, которые помогут преобразовывать тригонометрические выражения. Самыми важными из этих формул являются две – синус суммы двух аргументов и косинус суммы двух аргументов. Из этих формул в дальнейшем выводятся другие формулы.

$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y;$

$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$

Что скрывается под x и y? Это могут быть углы в градусах и в радианах, т.е. выраженные через π.

Например: $\sin 75°=?$ Мы с вами знаем значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов в 30,45 и 60 градусов. Будем называть эти значения табличными. 75° не входит в группу табличных значений. Воспользуемся формулой.

$$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\cdot\sin 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Как получить формулы синуса разности и косинуса разности? Да очень просто! $\sin(x-y)=\sin\big(x+(-y)\big)$. Раскрыв по выше приведенной формуле, получим следующую формулу:

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y.$$

Аналогично получим:

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y.$$

Уважаемые курсанты! Эти и последующие формулы сразу записывайте в тетрадь для справочных материалов.

Рассмотрим еще один пример.

$$\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cdot\cos 30°+\sin 45°\cdot\sin 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Кто-нибудь обратил внимание, что в предыдущем примере получился точно такой же ответ? Попробуйте это объяснить. То есть, ответьте на вопрос, почему $\sin 75° = \cos 15°$?

Вот задание другого типа, но работать нужно по тем же формулам.

Доказать:

а) $\sin(\pi + x) = -\sin x$; в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$;

б) $\cos(\pi + x) = -\cos x$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$.

Решение.

а) $\sin(\pi + x) = \sin\pi\cos x + \cos\pi\sin x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \sin x = -\sin x$;

б) $\cos(\pi + x) = \cos\pi\cos x - \sin\pi\sin x = (-1) \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = -\cos x$;

в) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\sin x = 1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = \cos x$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$. ◀

А вот обратное задание:

Вычислить:

а) $\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15} + \cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15}$;

б) $\cos 37°\cos 8° - \sin 37°\sin 8°$;

Решение. а) Заданное выражение можно «свернуть» в синус суммы аргументов $\frac{4\pi}{15}$ и $\frac{\pi}{15}$:

$$\sin\frac{4\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15} + \cos\frac{4\pi}{15}\sin\frac{\pi}{15} = \sin\left(\frac{4\pi}{15} + \frac{\pi}{15}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

б) Заданное выражение можно «свернуть» в косинус суммы аргументов 37° и 8°:

$$\cos 37°\cos 8° - \sin 37°\sin 8° = \cos(37° + 8°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Можно сделать вывод, что формулы работают в обе стороны – слева направо и справа налево.

Потренируйтесь со следующими заданиями.

1. Представив 105° как сумму 60° + 45°, вычислите:

а) $\sin 105°$; б) $\cos 105°$.

Упростите выражение:

2. а) $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha\cos\beta$;

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{1}{2}\sin\alpha$;

3. а) $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2}\cos\alpha$;

б) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{3}\right)$;

г) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\alpha$.

4. а) $\cos(\alpha - \beta) - \cos\alpha\cos\beta$;

б) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$;

в) $\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$;

г) $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

Сверьте с ответами. Высылать НЕ надо.

Ответы:

1а	1б	2а	2б	3а	3б
$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$	$\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3}+1)}{4}$	$\sin\beta \cdot \cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\alpha$	$-\sin\alpha$

3в	3г	4а	4б	4в	4г
$\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha \cdot \sin\beta$	$2\sin\alpha \cdot \cos\beta$	$\cos\alpha \cdot \sin\beta$	$2\sin\alpha \cdot \sin\beta$