ВНИМАНИЕ
13.10.2020 в 10.00 (время новосибирское)
планируется проведение занятия в ZOOM
ссылка для участия будет отправлена на электронную почту
ОБЯЗАТЕЛЬНО использовать личные данные: фамилия и имя, набранные русскими буквами, иначе вы не будете допущены к участию

Подготовить вопросы по теме: «Степени, корни и логарифмы» (задания можно посмотреть в занятиях 10, 12, 18)

Занятие № 21-22

Задание № 1. Прочитайте текст лекции, составьте конспект, постарайтесь запомнить формулы, записи в тетради делайте аккуратно. Конспект будет проверен при выходе на очное обучение (присылать его на проверку не надо).

Задание № 2. Выполнить решение в тетради:
Формулы приведения – стр 23-24 №№ 9.1(а, б) – 9.11(а, б)
Преобразование тригонометрических выражений – стр 14-15 №№ 6.10(а, б) – 6.14(а, б), стр 18-20 №№ 7.1(а, б) – 7.6(а, б), 7.12(а, б) – 7.16(а, б), стр 58-59 №№ 21.7(а, б), 21.8(а, б), 21.13(а, б) – 21.20(а, б), используя ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Старайтесь решать с пониманием, самостоятельно, не используя калькулятор и стороннюю помощь, так как в дальнейшем будет проведена проверка знаний в аудитории на очных занятиях.

<u>Основы тригонометрии</u>

Тема: Формулы приведения. Преобразование тригонометрических выражений.

<u>Формулы приведения.</u>

Формулы приведения — это соотношения, которые позволяют перейти от тригонометрических функций синус, косинус, тангенс и котангенс с углами $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к этим же функциям угла α, который находится в первой четверти единичной окружности. Таким образом, формулы приведения «приводят» нас к работе с углами в пределе от 0 до 90 градусов, что очень удобно.

Всех вместе формул приведения – 32 штуки. Но заучивать наизусть их нет необходимости. Нужно потратить немного времени и понять алгоритм их применения, тогда не составит труда в нужный момент вывести необходимое равенство.

Сначала запишем все формулы приведения, затем рассмотрим алгоритм.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$	$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(2\pi-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(2\pi+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(2\pi+\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha$

Часто формулы приведения оформляют в виде таблицы, где углы могут быть записаны как в градусах, так и в радианах:

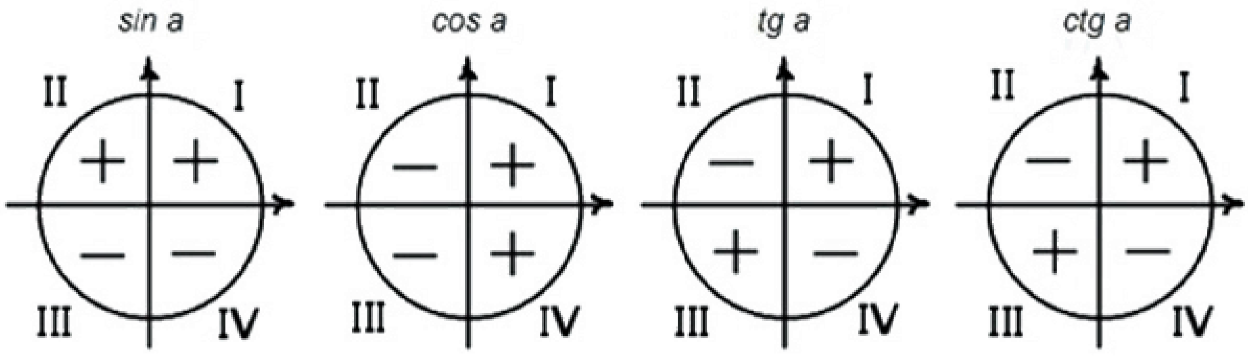
Функция	*Углы*							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Функция	*Углы*							
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Чтобы воспользоваться таблицей, нужно выбрать строку с нужной нам функцией, и столбец с нужным аргументом. Например, чтобы узнать с помощью таблицы, чему будет равно $\sin(90°+\alpha)$, достаточно найти ответ на пересечении строки sin и столбца $90°+\alpha$. Получим $\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$.

Как уже упоминалось, заучивать все вышеприведенные соотношения не нужно. Если вы внимательно на них посмотрели, то наверняка заметили некоторые закономерности. Они позволяют нам сформулировать мнемоническое правило (мнемоника — запоминать), с помощью которого легко можно получить любую из формул приведения.

Сразу отметим, что для применения этого правила нужно хорошо уметь определять знаки тригонометрических функций в разных четвертях единичной окружности.



Само правило содержит 3 этапа:

1. Аргумент функции должен быть представлен в виде $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$, причем α — обязательно острый угол (от 0 до 90 градусов).
2. Для аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, тригонометрическая функция преобразуемого выражения меняется на кофункцию, то есть противоположную (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот). Для аргументов $\pi\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ функция не меняется.
3. Определяется знак исходной функции. Полученная функция в правой части будет иметь такой же знак.

<u>Преобразование тригонометрических выражений.</u>

Для преобразования (упрощения или доказательства) тригонометрических выражений будем применять основные тригонометрические тождества, формулы сложения, формулы удвоения, формулы приведения.

Основные тригонометрические тождества

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4) $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$
5) $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
6) $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
4) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
5) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$
6) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$
7) $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$
8) $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta) = -\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta+1}{\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta}$

Формулы удвоения

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$
2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
3) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
4) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
5) $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$
6) $\mathrm{ctg}2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$

Формулы приведения.

Функция	*Углы*							
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$	$360°+\alpha$
sin	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
ctg	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Некоторые правила, которые помогут преобразовывать тригонометрические выражения:

Если в задании с тригонометрическими функциями вам встретились тангенс или котангенс, то лучше сразу расписать их по определению. Это сведет задачу к работе только с синусами и косинусами.

Если в тригонометрических выражениях разные меры угла (градусы и радианы), то их следует привести к единой.

Если синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы содержат разные аргументы (углы), то стараемся привести к одному аргументу (углу).

Если в тригонометрическом выражении необходимо поменять синус на косинус, тангенс на котангенс, то применяем формулы приведения.

Если тригонометрические выражения содержат большое количество тригонометрических функций, то необходимо привести к минимальному количеству видов функций. Для этого используем различные тригонометрические формулы.

Часто при преобразовании тригонометрических выражений применяются также формулы сокращенного умножения, изученные в 7 классе.

Главное – понять, какую формулу нужно использовать. Чем больше практики будет, тем легче вам будет выбрать нужную формулу. Но поначалу не страшно, если выбранный способ решения окажется длинным или не приведет к нужному результату. Тогда нужно вернуться и попробовать использовать другую формулу.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1