Занятие № 32

Задание № 1. Прочитайте текст лекции, составьте конспект, постарайтесь запомнить формулы, записи в тетради делайте аккуратно. Конспект будет проверен при выходе на очное обучение (присылать его на проверку не надо).

Задание № 2. Выполнить решение в тетради стр 45-47 №№ 18.1 (а, б), 18.2 (а, б), 18.5 (а,б) - 18.13 (а, б), используя ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Старайтесь решать с пониманием, самостоятельно, не используя калькулятор и стороннюю помощь, так как в дальнейшем будет проведена проверка знаний в аудитории на очных занятиях.

Тема: Основные методы решения тригонометрических уравнений

Основные методы решения

Любое тригонометрическое уравнение в процессе решения с помощью надлежащих преобразований должно быть приведено к простейшим. Наиболее часто при решении тригонометрических уравнений применяются следующие методы:

- способ замены (сведение к алгебраическим уравнениям);
- разложение на множители;
- сведение к уравнениям, однородным относительно $\boldsymbol{\sin x}$ и $\boldsymbol{\cos x}$;
- применение формул приведения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение или преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- равенство одноименных тригонометрических функций
- введение вспомогательного аргумента.

При этом, как правило, в процессе решения тригонометрического уравнения приходится использовать не один, а несколько из указанных выше методов. Рассмотрим некоторые из них.

Способ замены

Данным методом решаются уравнения вида:

$a\,sin^2x + b\,sin\,x + c = 0$,

$a\,cos^2x + b\,cos\,x + c = 0$,

$a\,tg^2x + b\,tg\,x + c = 0$,

$a\,ctg^2x + b\,ctg\,x + c = 0$ при $a \neq 0$.

Они сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям с помощью замены: $sin\,x = t$, $cos\,x = t$, $tg\,x = t$, $ctg\,x = t$. После замены уравнения такого вида становятся квадратными.

Пример 1. Решить уравнение $cos^2x + cos\,x - 2 = 0$.

Решение: Это уравнение является квадратным относительно $cos\,x$. Поэтому сделаем замену $t = cos\,x$. В результате получим уравнение $t^2 + t - 2 = 0$. Его корни по теореме Виета: $t_1 = 1$, $t_2 = -2$, то есть получаем уравнение $cos\,x = 1$ или $cos\,x = -2$. Первое уравнение дает $x = 2\pi k,\ k \in Z$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $6cos^2x + 5sin\,x - 7 = 0$.

Решение: Применим формулу: $cos^2x + sin^2x = 1$, откуда имеем: $cos^2x = 1 - sin^2x$. Тогда уравнение можно представить в виде $6(1 - cos^2x) + 5sin\,x - 7 = 0$; $6sin^2x - 5sin\,x + 1 = 0$. Сделаем замену $t = sin\,x$. Получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t + 1 = 0$, решая которое, имеем: $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1$ $t_1 = \frac{1}{2},\ t_2 = \frac{1}{3}$. Таким образом, получим два простейших уравнения $sin\,x = \frac{1}{2}$ или $sin\,x = \frac{1}{3}$. Решая их, имеем $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = (-1)^k arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ:

$x_1 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z;\ x_2 = (-1)^k arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z.$

Разложение на множители

При решении уравнений этим методом нужно пользоваться известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Необходимо знать тригонометрические формулы: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$; и другие.

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x - \cos x = 0$.
Решение: Применим формулу синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, получим

$$2\sin x\cdot\cos x - \cos x = 0,$$

Вынесем за скобки общий множитель $\cos x$, получим:

$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений: $\cos x = 0$, $2\sin x - 1 = 0$.
Решение 1-го уравнения:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$$

Решение 2-го уравнения:

$$2\sin x - 1 = 0,$$
$$2\sin x = 1,$$
$$\sin x = \frac{1}{2}.$$
$$x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ:
$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $x_2 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \sin x\cos x + 1$.
Решение: Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители:

$$\sin x + \cos x - \sin x\cos x - 1 = 0,$$
$$\sin x - \sin x\cos x + \cos x - 1 = 0$$
$$\sin x\,(1 - \cos x) + (\cos x - 1) = 0,$$
$$\sin x\,(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0$$
$$(1 - \cos x)(\sin x - 1) = 0.$$

Отсюда следует, что $1 - \cos x = 0$ или $\sin x - 1 = 0$, то есть имеем уравнение $\cos x = 1$ или $\sin x = 1$. Решая их, получим $x = 2\pi k,\ k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ:
$x_1 = 2\pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Однородные уравнения

Уравнения вида:

$$a_0\, sin\, x + a_1\, cos\, x = 0,$$
$$a_0\, sin^2\, x + a_1\, sin\, x\, cos\, x + a_2\, cos^2\, x = 0,$$
$$a_0\sin^3 x + a_1\sin^2 x\cos x + a_2\sin x\cos^2 x + a_3\cos^3 x = 0,$$
$$a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1} x\cos x + a_2\sin^{n-2} x\cos^2 x + \ldots + a_{n-1}\sin x\cos^{n-1} x + a_n\cos^n x = 0$$

называются *однородными относительно* $sin\, x$ и $cos\, x$. Они обладают тем свойством, что сумма показаний степеней при $sin\, x$ и $cos\, x$ у всех членов уравнения одинакова. Делением на $cos\, x$, $cos^2\, x, \ldots\, cos^n\, x$ соответственно уравнения приводятся к алгебраическим уравнениям относительно $tg\, x$. При этом, конечно, предполагается, что коэффициент $a \neq 0$. В результате получаем равносильное уравнение, так как разделили на $cos\, x \neq 0$ (если бы $cos\, x = 0$, то из исходного уравнения следует, что и $sin\, x = 0$, а это невозможно, так как $sin\, x$ и $cos\, x$ при одном и том же значении x в нуль не обращаются, ибо всегда $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$).

Пример. Решить уравнение: $3\, sin^2\, x - 2\, sin\, x\, cos\, x - cos^2\, x = 0$.

Решение: Это уравнение является однородным относительно $sin\,x$ и $cos\,x$. Поэтому, разделив его на $cos^2\,x$ $(cos\,x \neq 0)$, получим $3\,tg^2\,x - 2\,tg\,x - 1 = 0$. Введем новую переменную $t = tg\,x$ и решим квадратное уравнение $3\,t^2 - 2\,t - 1 = 0$. $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$. Получили два простейших тригонометрических уравнения
$tg\,x = 1$, $tg\,x = -\frac{1}{3}$. Решая их, найдем: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$ или $x = -arctg\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$.
Ответ:
$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$; $x_2 = -arctg\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$.

Применение формул приведения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение или преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы приведения, формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

Пример 1. Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0$.
Решение: По формулам приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$. Получаем уравнение:
$\sin 3x - \sin 2x = 0$. Пользуясь, формулой преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin 3x - \sin 2x = 2\sin\frac{3x-2x}{2}\cos\frac{3x+2x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}.$$

В результате получим уравнение $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0$, откуда $\sin\frac{x}{2} = 0$ или $\cos\frac{5x}{2} = 0$. Решая эти уравнения, получим $x = 2\pi k,\ k \in Z$ и $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k,\ k \in Z$.
Ответ:
$x_1 = 2\pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin(2\pi + 2x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(\pi - 3x)$.
Решение: Применим формулы приведения, получим уравнение:

$$\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x.$$

Пользуясь формулой, преобразуем произведение синусов и произведение косинусов в сумму. В результате получим:

$$\frac{1}{2}[\cos(2x - 6x) - \cos(2x + 6x)] = \frac{1}{2}[\cos(x - 3x) + \cos(x + 3x)],$$
$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 2x + \cos 4x,$$
$$\cos 8x + \cos 2x = 0.$$

Преобразуем теперь в произведение сумму косинусов, будем иметь $2\cos 5x \cos 3x = 0$, откуда $\cos 5x = 0$ или $\cos 3x = 0$. Решая эти уравнения, получим $x = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi k}{5},\ k \in Z$ или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.
Ответ:
$x_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{\pi k}{5}$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

17.7. а) $\operatorname{ctg} x = 1$; в) $\operatorname{ctg} x = 0$;

б) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

○**17.8.** а) $\operatorname{tg}^2 x - 6 \operatorname{tg} x + 5 = 0$;
б) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$.

○**17.9.** а) $\operatorname{tg}(\pi + x) = \sqrt{3}$;

б) $2 \operatorname{ctg}(2\pi + x) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$;

в) $-\sqrt{3} \operatorname{tg}(\pi - x) = 1$;

г) $\operatorname{ctg}(2\pi - x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 2$.

●**17.10.** Постройте график функции:
а) $y = \arccos 2x + \arccos(-2x)$;
б) $y = \arccos \frac{1}{x} + \arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$;
в) $y = \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg}(-x)$;
г) $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x} + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{x}\right)$.

§ 18. Тригонометрические уравнения

Решите уравнение:

○**18.1.** а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

б) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; г) $\cos 4x = 0$.

○**18.2.** а) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

○**18.3.** а) $2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; в) $2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$; г) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

Решите уравнение:

○**18.4.** а) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1;$ в) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3};$

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1;$ г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}.$

○**18.5.** а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi + t) = 1;$

б) $\sin(\pi + t) + \sin(2\pi - t) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) + 1{,}5 = 0;$

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) - \sin(\pi + t) = \sqrt{2};$

г) $\sin(\pi + t) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \sqrt{3}.$

○**18.6.** а) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0;$

б) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0;$

в) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0;$

г) $2\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} + 1 = 0.$

○**18.7.** а) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0;$

б) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0;$

в) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0;$

г) $2\cos^2\frac{x}{3} + 3\cos\frac{x}{3} - 2 = 0.$

○**18.8.** а) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0;$

б) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0;$

в) $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0;$

г) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4.$

○18.9. а) $3\ \mathrm{tg}^2\, x + 2\ \mathrm{tg}\, x - 1 = 0$;

б) $\mathrm{ctg}^2\, 2x - 6\ \mathrm{ctg}\, 2x + 5 = 0$;

в) $2\ \mathrm{tg}^2\, x + 3\ \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$;

г) $7\ \mathrm{ctg}^2 \frac{x}{2} + 2\ \mathrm{ctg} \frac{x}{2} = 5$.

18.10. а) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $\sin x - 3 \cos x = 0$;

г) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$.

○18.11. а) $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$;

б) $\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$;

в) $\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$;

г) $\sqrt{3} \cos^2 x = \sin x \cos x$.

○18.12. а) $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0$;

б) $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$;

в) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$;

г) $3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$.

○18.13. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

а) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x + 1) = 0$;

б) $\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)(\cos x - 1) = 0$;

в) $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$;

г) $(1 + \cos x)\left(\sqrt{2} \sin x - 1\right) = 0$.