

Занятие № 49-50

Раздел 4. Уравнения и неравенства.

Тема: Логарифмические уравнения и неравенства.

Решение уравнений и неравенств.

Задание № 1. Посмотрите учебный видеоматериал по теме урока, используя ссылки. Составьте конспект по теме.

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/4732/main/198846/>

<https://resh.edu.ru/subject/lesson/3852/main/199123/>

Задание № 2. Выполнить решение в тетради (решение делайте подробно, аккуратно). Старайтесь решать с пониманием, самостоятельно, не используя калькулятор и стороннюю помощь, так как в дальнейшем будет проведена проверка знаний в аудитории на очных занятиях.

стр 150-153 №№ 44.1 (б) – 44.17 (б).

стр 154-156 №№ 45.1 (б) - 45.18 (б).

○43.32. Вычислите:

а) $\log_{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(2\cos\frac{\pi}{8}\right)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$;

г) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right) + \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\right)$.

○43.33. Известно, что $\log_3 2 = a$ и $\log_3 5 = b$. Выразите через a и b :

а) $\log_3 10$; б) $\log_3 20$; в) $\log_3 50$; г) $\log_3 200$.

●43.34. Сравните числа:

а) $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$; б) $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$.

Постройте график функции:

○43.35. а) $y = \log_2 8x$; в) $y = \log_3 \frac{x}{27}$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}} 4x$; г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9}$.

○43.36. а) $y = \log_2 x^3$; в) $y = \log_3 \frac{1}{x}$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}$; г) $y = \log_{\frac{1}{2}} x^3$.

○43.37. а) $y = \log_2 \frac{4}{x}$; в) $y = \log_3 9x^3$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^3}{27}$; г) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{x}$.

§ 44. Логарифмические уравнения

44.1. Решите уравнение:

а) $\log_2 (3x - 6) = \log_2 (2x - 3)$;

б) $\log_6 (14 - 4x) = \log_6 (2x + 2)$;

в) $\log_{\frac{1}{6}} (7x - 9) = \log_{\frac{1}{6}} x$;

г) $\log_{0,2} (12x + 8) = \log_{0,2} (11x + 7)$.

Решите уравнение:

○44.2. а) $\log_3(x^2 + 6) = \log_3 5x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(7x^2 - 200) = \log_{\frac{1}{2}} 50x$;

в) $\lg(x^2 - 6) = \lg(8 + 5x)$;

г) $\lg(x^2 - 8) = \lg(2 - 9x)$.

○44.3. а) $\log_{0,1}(x^2 + 4x - 20) = 0$;

в) $\log_7(x^2 - 12x + 36) = 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 10x + 10) = 0$;

г) $\log_{12}(x^2 - 8x + 16) = 0$.

○44.4. а) $\log_3(x^2 - 11x + 27) = 2$;

в) $\log_2(x^2 - 3x - 10) = 3$;

б) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2 + x - 5) = -1$;

г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 1) = -2$.

○44.5. а) $\log_2(x^2 + 7x - 5) = \log_2(4x - 1)$;

б) $\log_{0,3}(-x^2 + 5x + 7) = \log_{0,3}(10x - 7)$;

в) $\log_2(x^2 + x - 1) = \log_2(-x + 7)$;

г) $\log_{0,2}(-x^2 + 4x + 5) = \log_{0,2}(-x - 31)$.

○44.6. а) $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$;

б) $\log_4^2 x - \log_4 x - 2 = 0$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0$;

г) $\log_{0,2}^2 x + \log_{0,2} x - 6 = 0$.

○44.7. а) $2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$;

б) $3\log_4^2 x - 7\log_4 x + 2 = 0$;

в) $2\log_{0,3}^2 x - 7\log_{0,3} x - 4 = 0$;

г) $3\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 5\log_{\frac{1}{2}} x - 2 = 0$.

44.8. а) $\log_2 x = \log_2 3 + \log_2 5$;

б) $\log_7 4 = \log_7 x - \log_7 9$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 18$;

г) $\log_{0,4} 9 - \log_{0,4} x = \log_{0,4} 3$.

Решите уравнение:

○44.9. а) $2 \log_8 x = \log_8 2,5 + \log_8 10$;

б) $3 \log_2 \frac{1}{2} - \log_2 \frac{1}{32} = \log_2 x$;

в) $3 \log_{\frac{1}{7}} x = \log_{\frac{1}{7}} 9 + \log_{\frac{1}{7}} 3$;

г) $4 \log_{0,1} x = \log_{0,1} 2 + \log_{0,1} 8$.

○44.10. а) $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 2) = \log_3 (2x - 1)$;

б) $\log_{11} (x + 4) + \log_{11} (x - 7) = \log_{11} (7 - x)$;

в) $\log_{0,6} (x + 3) + \log_{0,6} (x - 3) = \log_{0,6} (2x - 1)$;

г) $\log_{0,4} (x + 2) + \log_{0,4} (x + 3) = \log_{0,4} (1 - x)$.

○44.11. а) $\log_{23} (2x - 1) - \log_{23} x = 0$;

б) $\log_{0,5} (4x - 1) - \log_{0,5} (7x - 3) = 1$;

в) $\log_{3,4} (x^2 - 5x + 8) - \log_{3,4} x = 0$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} (x + 9) - \log_{\frac{1}{2}} (8 - 3x) = 2$.

○44.12. а) $\log_x (2x^2 + x - 2) = 3$;

б) $\log_{x-1} (12x - x^2 - 19) = 3$.

○44.13. а) $\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{\lg 10x}$;

б) $\log_3^2 x + 3 \log_3 x + 9 = \frac{37}{\log_3 \frac{x}{27}}$;

в) $\lg^2 x - 2 \lg x + 4 = \frac{9}{\lg 100x}$;

г) $\log_2^2 x + 7 \log_2 x + 49 = \frac{-218}{\log_2 \frac{x}{128}}$.

○44.14. а) $\lg 100x \cdot \lg x = -1$;

б) $\lg^2 10x + \lg 10x = 6 - 3 \lg \frac{1}{x}$.

○44.15. а) $\log_5 (6 - 5^x) = 1 - x$; б) $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$.

○44.16. а) $x^{\log_3 x} = 81$;

в) $x^{\log_2 x} = 16$;

б) $x^{\log_{0,5} x} = \frac{1}{16}$;

г) $x^{\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{1}{81}$.

○44.17. а) $x^{1+\log_3 x} = 9$;

в) $x^{5+\log_2 x} = \frac{1}{16}$;

б) $x^{\log_{0,5} x - 2} = 0,125$;

г) $x^{\log_{\frac{1}{3}} x - 4} = 27$.

Решите систему уравнений:

○44.18. а)
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + 3x - 2) - \log_2 y = 1, \\ 3x - y = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ \log_3(x^2 + 4x - 3) - \log_3 y = 1. \end{cases}$$

○44.19. а)
$$\begin{cases} \log_5(x + y) = 1, \\ \log_6 x + \log_6 y = 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_{0,5}(x + 2y) = \log_{0,5}(3x + y), \\ \log_7(x^2 - y) = \log_7 x. \end{cases}$$

○44.20. а)
$$\begin{cases} \log_9(x - y) = \frac{1}{2}, \\ \log_{64} x - \log_{64} y = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(3x - y) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 4), \\ \log_9(x^2 + x - y) = \log_9 x^2. \end{cases}$$

○44.21. а)
$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 16, \\ \log_3 x + \log_3 y = 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 81, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1. \end{cases}$$

○44.22. а)
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-y} = \frac{1}{27}, \\ \log_2 2x - \log_2 y = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot (\sqrt{2})^y = \log_9 3, \\ \log_4 y - \log_4 x = 1. \end{cases}$$

§ 45. Логарифмические неравенства

Решите неравенство:

45.1. а) $\log_2 x \geq 4$;

в) $\log_2 x < \frac{1}{2}$;

б) $\log_2 x \leq -3$;

г) $\log_2 x > -\frac{1}{2}$.

45.2. а) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 2$;

в) $\log_{0,2} x < 3$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq -3$;

г) $\log_{0,1} x > -\frac{1}{2}$.

О45.3. а) $\log_5 (3x + 1) < 2$;

в) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{x}{4} > 1$;

б) $\log_{0,5} \frac{x}{3} \geq -2$;

г) $\log_{\sqrt{3}} (2x - 3) < 4$.

О45.4. а) $\log_5 x > \log_5 (3x - 4)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} (5x - 9) \geq \log_{\frac{1}{3}} 4x$;

б) $\log_{0,6} (2x - 1) < \log_{0,6} x$;

г) $\log_3 (8 - 6x) \leq \log_3 2x$.

О45.5. а) $\log_2 (5x - 9) \leq \log_2 (3x + 1)$;

б) $\log_{0,4} (12x + 2) \geq \log_{0,4} (10x + 16)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} (-x) > \log_{\frac{1}{3}} (4 - 2x)$;

г) $\log_{2,5} (6 - x) < \log_{2,5} (4 - 3x)$.

О45.6. а) $\log_3 (x^2 + 6) < \log_3 5x$;

б) $\log_{0,6} (6x - x^2) > \log_{0,6} (-8 - x)$;

в) $\lg (x^2 - 8) \leq \lg (2 - 9x)$;

г) $\log_{\sqrt{2}} (x^2 + 10x) \geq \log_{\sqrt{2}} (x - 14)$.

О45.7. а) $\log_{\frac{1}{2}} (6 - x) \geq \log_{\frac{1}{2}} x^2$;

б) $\log_{0,3} (x^2 + 22) < \log_{0,3} 13x$;

в) $\log_{\frac{1}{4}} (-x - 6) \leq \log_{\frac{1}{4}} (6 - x^2)$;

г) $\log_{0,5} (x^2 - 27) > \log_{0,5} 6x$.

Решите неравенство:

○45.8. а) $\log_8 (x^2 - 7x) > 1$;

в) $\log_2 (x^2 - 6x + 24) < 4$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 0,5x) \leq 1$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} (-x^2 + \frac{10x}{9}) \geq 2$.

○45.9. а) $\log_2^2 x > 4 \log_2 x - 3$;

в) $\log_4^2 x + \log_4 x \leq 2$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + 3 \log_{\frac{1}{2}} x < -2$;

г) $\log_{0,2}^2 x \geq 6 - \log_{0,2} x$.

○45.10. а) $\log_3 x > \log_3 72 - \log_3 8$;

б) $3 \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} 3$;

в) $\log_5 x - \log_5 35 \leq \log_5 \frac{1}{7}$;

г) $4 \log_{0,6} x \geq \log_{0,6} 8 + \log_{0,6} 2$.

○45.11. а) $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} (4 - x) > -1$;

б) $\log_2 (7 - x) + \log_2 x \geq 1 + \log_2 3$;

в) $\lg (7 - x) + \lg x > 1$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (10 - x) \geq -1 + \log_{\frac{1}{2}} 4,5$.

○45.12. а) $2 \log_5^2 x + 5 \log_5 x + 2 \geq 0$;

б) $2 \log_{0,3}^2 x - 7 \log_{0,3} x - 4 \leq 0$;

в) $3 \log_4^2 x - 7 \log_4 x + 2 < 0$;

г) $3 \log_{\frac{1}{3}}^2 x + 5 \log_{\frac{1}{3}} x - 2 > 0$.

○45.13. а) $\log_2^2 x^2 - 15 \log_2 x - 4 \leq 0$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x^2 - 7 \log_{\frac{1}{3}} x + 3 \leq 0$;

в) $\log_3^2 x^2 + 13 \log_3 x + 3 < 0$;

г) $\log_{\frac{1}{5}}^2 x^2 - 31 \log_{\frac{1}{5}} x - 8 < 0$.

О45.14. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

а) $\log_7(6x - 9) < \log_7(2x + 3)$;

б) $\log_{\frac{1}{5}}(2 - x) \geq \log_{\frac{1}{5}}(2x + 4)$;

в) $\lg(8x - 16) < \lg(3x + 1)$;

г) $\log_{0,4}(7 - x) \geq \log_{0,4}(3x + 6)$.

О45.15. Сколько целочисленных решений имеет неравенство:

а) $\log_{12}(x^2 - x) \leq 1$; в) $\log_9(x^2 - 8x) \leq 1$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 10x + 9) \geq 0$; г) $\log_{0,3}(-x^2 + 7x - 5) < 0$?

Решите систему неравенств:

О45.16. а)
$$\begin{cases} \log_2(2x + 3) > \log_2(x - 2), \\ \log_6(3x - 1) \leq \log_6(9x + 4); \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_3(6x - 1) \leq \log_3(9x + 11), \\ \log_6(3 - x) > \log_6(4x - 1). \end{cases}$$

О45.17. а)
$$\begin{cases} \log_3 x^2 > \log_3 125 - \log_3 5, \\ \log_{0,2}(x - 1) < 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}} 28 - \log_{\frac{1}{2}} 7, \\ \log_3(4x - 1) > 0. \end{cases}$$

О45.18. а)
$$\begin{cases} \log_{0,1}(x^2 - 12) < \log_{0,1}(-x), \\ 2^{x-1} > \frac{1}{8}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 3^{x^2-5x-4} < 9, \\ \log_{\frac{1}{5}}(x^2 + 3) \geq \lg_{\frac{1}{5}} 4x. \end{cases}$$

§ 46. Переход к новому основанию логарифма

О46.1. Вычислите:

а) $\log_2 \frac{1}{3} + \log_4 9$;

в) $\log_{25} 9 - \log_5 3$;

б) $\log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{2} + \log_3 \frac{1}{2}$;

г) $\log_{16} 4 - \log_4 8$.