Занятие №7

Тема: Корни и степени. Корни натуральной степени из числа и их свойства. Степени с рациональными показателями, их свойства. Степени с действительными показателями. *Свойства степени с действительным показателем.*

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме:
1) Определение степени с натуральным, целым, рациональным и действительным показателем; свойства степеней.
2) Определение корня; свойства корней.

Задание № 1. Прочитайте текст лекции, составьте краткий конспект, постарайтесь запомнить формулы, записи в тетради делайте аккуратно. Конспект будет проверен при выходе на очное обучение (присылать его на проверку не надо).

Степень с натуральным показателем

Возведение в степень — операция, первоначально определяемая как результат многократного умножения натурального числа на себя.
Проще всего определяется степень с натуральным (то есть целым положительным) показателем.
По определению: $a^1 = a$.
Выражения «возвести в квадрат» и «возвести в куб» нам давно знакомы.
Возвести число в квадрат — значит умножить его само на себя: $a^2 = a \cdot a$
Возвести число в куб — значит умножить его само на себя три раза: $a^3 = a \cdot a \cdot a$.
Возвести число в натуральную степень n — значит умножить его само на себя n раз:
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$

Возведение в степень определено также для целых (отрицательных), рациональных, действительных (вещественных) и даже комплексных степеней.

Степень с целым показателем

Если $a \neq 0$, $n \in N$, то величина a^{-n} есть величина, обратная к степени a^n, то есть

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Необходимо запомнить: любое число в нулевой степени (за исключением 0) равно 1, то есть $a^0 = 1$.
Выражение 0^0 не определено. (Почему это так? Найдите ответ самостоятельно.)

Степень с рациональным показателем

Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное ($n > 1$), называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Степень с действительным показателем

Действительные (вещественные) числа представляют собой расширение множества рациональных чисел и, кроме рациональных чисел, включают множество иррациональных чисел, не представимых в виде отношения целых. (Смотрите теоретические сведения к занятию № 2.)

Строгого определения степени с иррациональным показателем на школьном уровне 10-11 класса дать нельзя. Для этого нужно хорошо понимать, что такое предел последовательности, и как с ним работать. Но основываясь на интуитивном представлении о пределе, можно сказать следующее. Пусть даны положительное число a и иррациональное число r. Рассмотрим какую-нибудь последовательность рациональных чисел, *стремящихся* к r (например, его десятичные приближения). Тогда *предел* последовательности, а это уже рациональная степень числа a, называется -ой степенью числа a, и обозначается a^r.

Свойства степеней:
$a^1 = a$
$a^0 = 1,\ a \neq 0$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$a^n : a^m = a^{n-m}$
$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Корни и степени — две взаимосвязанные темы.

Корнем n -ной $(n = 2, 3, 4, 5, ...)$ степени из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, при возведении которого в степень n получается a, и обозначают:

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a.$

Число n называется показателем корня, а само число a — подкоренным выражением.

Если $n = 2$, то обычно говорят не «корень второй степени», а «квадратный корень». В этом случае показатель корня $n = 2$ не пишут, то есть пишут не $\sqrt[2]{a}$, а $\sqrt{a}$. Этот случай вы изучали в курсе алгебры 8-го класса.

Если $n = 3$, то вместо «корень третьей степени», часто говорят «кубический корень» и пишут $\sqrt[3]{a}$. Первое знакомство с кубическим корнем состоялось в курсе алгебры 9-го класса.

Операцию нахождения корня из неотрицательного числа называют обычно извлечением корня. Эта операция является обратной по отношению к возведению в соответствующую степень:

Возведение в степень	Извлечение корня
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$0,3^4 = 0,0081$	$\sqrt[4]{0,0081} = 0,3$

Операцию извлечения корня определяют и для отрицательного подкоренного числа, но только в случае нечетного показателя корня. Иными словами, равенство $(-2)^5 = -32$ можно переписать в эквивалентной форме $\sqrt[5]{-32} = -2$. При этом используется следующее определение.

Корнем нечетной степени n $(n = 3, 5, ...)$ из отрицательного числа a называют такое отрицательное число, при возведении которого в степень n получается число a.

Таим образом, корень четной степени имеет смысл только для неотрицательного подкоренного числа; корень нечетной степени имеет смысл для любого подкоренного числа. (Или другими словами: корень четной степени из отрицательного числа не существует, а корень нечетной степени существует всегда.)

Свойства корней:

Для любых натуральных m, n, k и любых неотрицательных чисел a и b.

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
$\sqrt[n]{a^n} = a$