Занятие 30

Тема. Тригонометрические неравенства.

При решении тригонометрических неравенств (как, в прочем, и любых других неравенств) первым шагом мы решаем уравнение. Поэтому начнем сегодняшнее занятие с уравнения.

Решить тригонометрическое уравнение.

$$2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}.$$

Рассмотрим его решение пошагово, будем записывать процесс, который выполняем. Кроме этого, буквами А и Т я буду отмечать действия, относящиеся соответственно к Алгебре и Тригонометрии.

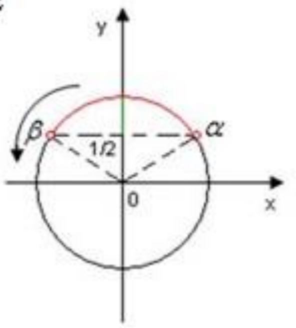
1. Выразим косинус. (А) $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Воспользуемся формулой для решения уравнения cosx=a: x=$\pm$arccos a+$2\pi n$. $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+2\pi n$ (Т)
3. По тригонометрической окружности определим значение arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$ (Т). $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$
4. Чтобы удобнее было считать, запишем два равенства отдельно: $\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.$ (А)
5. Перенесем в правую часть $\frac{\pi}{6}$ (А). Получим:
$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+2\pi n\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi n\end{array}\right.$$
6. Сложим дроби в правой части (А). Получим:
$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2\pi n\\ \frac{x}{2}=2\pi n\end{array}\right.$$
7. Умножим обе части равенства на 2 (А). Получим:
$\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\\ x=4\pi n\end{array}\right.$ Это и есть решение тригонометрического уравнения.

   Из 7 действий 5 действия алгебраических и только 2 тригонометрических. Поэтому ссылаться на непонимание темы неактуально!!!!!

   Перейдем к неравенствам. Рассмотрим сначала простое неравенство.

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

$\sin x > 1/2$



α -начало дуги, $\alpha = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

β-конец дуги, $\beta = \pi - \arcsin \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}.$$

С учётом периодичности:

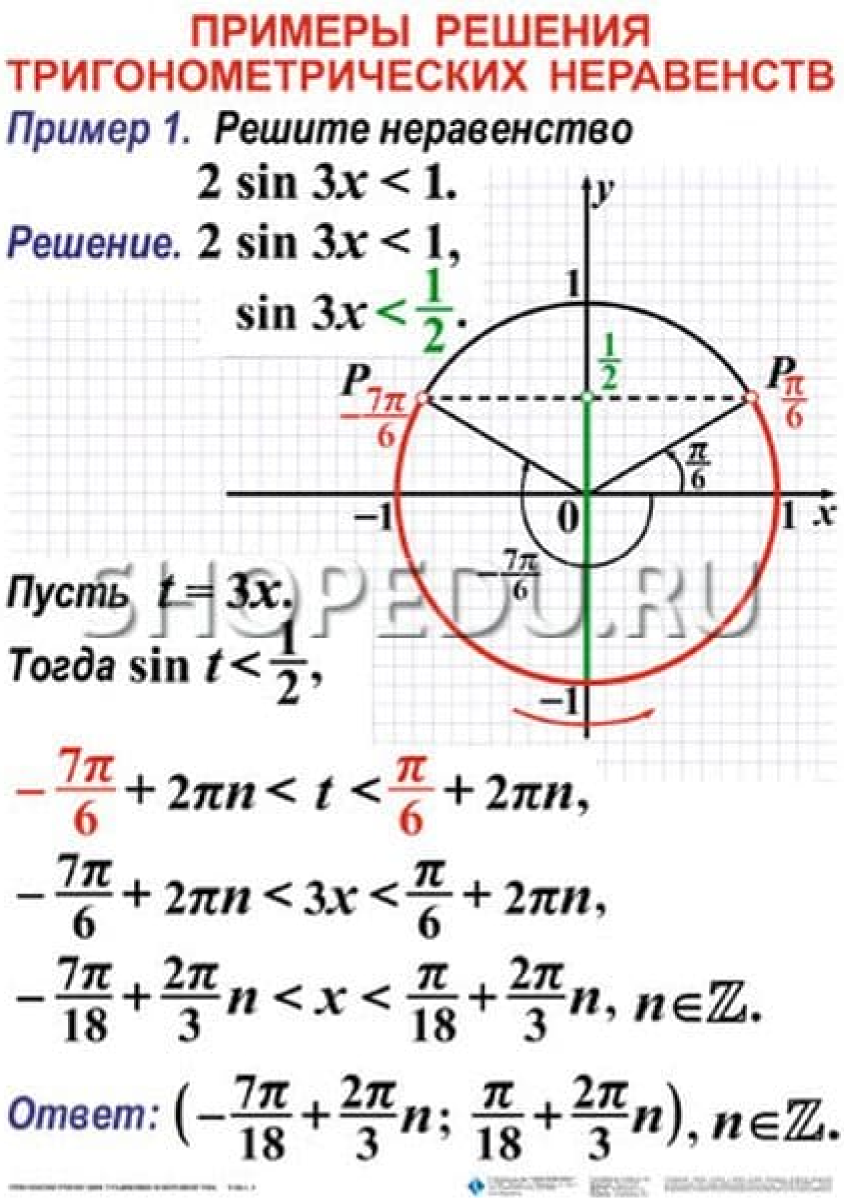
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n), n \in Z.$

Пояснения:

1. Решаем уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$. Точки $\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\beta = \frac{5\pi}{6}$ соответствуют решению этого уравнения.
2. Значения синуса должны быть больше $\frac{1}{2}$. На окружности это все точки от $\alpha = \frac{\pi}{6}$ до $\beta = \frac{5\pi}{6}$, не включая эти точки, так как неравенство строгое.$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$
3. Помним о том, что при движении по окружности мы снова и снова будем попадать в эти точки и на дугу от $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$. Поэтому к левой и правой части добавляем $+2\pi n$.
4. О чем говорит $n \in Z$? О том, что n может быть любым целым положительным, отрицательным числом и 0. То есть движение по окружности может быть как по часовой, так и против часовой стрелки. Может быть найдено решение только на первом кругу, то есть n=0.

Рассмотрим еще неравенство.



Обратите внимание, что синус должен быть меньше $\frac{1}{2}$. Это все точки на оси синусов, ниже $\frac{1}{2}$. Точки на окружности, соответствующие этим значения синуса показаны красным цветом.

Почему левая точка Р подписана $-\frac{7\pi}{6}$, а не $\frac{5\pi}{6}$?

Запомните два правила записывания двойного неравенства при решении тригонометрических неравенств.

1. Слева от х пишется меньшее число, а справа – большее.

2. Так как наша дуга захватывает точку 0, значит, двигаясь против часовой стрелки (в положительном направлении), мы должны идти от минуса к плюсу.

Именно поэтому левая точка P подписана отрицательным числом.