

Занятие 38

Тема. Свойства функций. Монотонность, четность, ограниченность, периодичность. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Арифметические операции над функциями. Сложная функция (композиция). Обратная функция, ее свойства и график.

На сегодняшнем занятии будем заполнять таблицу свойств функций.

	$Y=kx+m$	$Y=ax^2+bx+c$	$Y=\frac{k}{x}$	$Y=\sqrt{x}$	$Y=x^3$	$Y= x $
Эскиз графика						
1. D(f)	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
2. E(f)	\mathbb{R}	$[y(x_0); +\infty),$ $a > 0.$ $(-\infty; y(x_0)],$ $a < 0.$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	\mathbb{R}	$[0; +\infty)$
3. Монотонность, промежутки возрастания и убывания						
4. Четность						
5. Ограниченность						
6. Наибольшее, наименьшее значения функции						

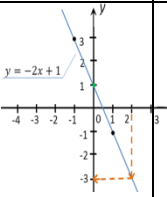
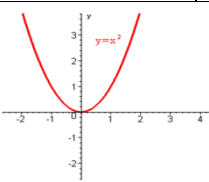
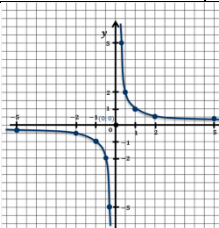
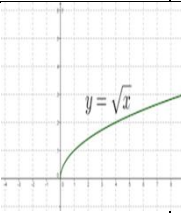
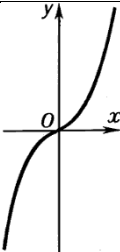

7.Точки экстремума						
8.Нули функции						
9.Промежутки знакопостоянства						
10.Непрерывность						
11.Периодичность						

Первые два свойства мы рассмотрели на прошлом занятии. Перейдем к следующим свойствам. Нумерация соответствует нумерации в таблице.

3. Монотонность.

Монотонная функция – это функция, которая все время или не убывает, или не возрастает. Почему нельзя сказать: или только возрастает, или только убывает? Потому что могут промежутки, где функция постоянна. У монотонной функции нигде не происходит смены возрастания на убывание и наоборот.

Но есть такие функции, которые на одном промежутке возрастают, а на другом убывают. Тогда речь будет идти о монотонности на определенном промежутке, и данная функция не может быть названа монотонной. Заполним строчку с этим свойством.

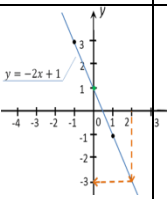
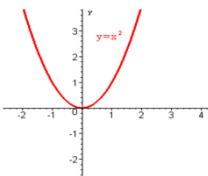
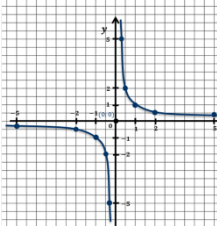
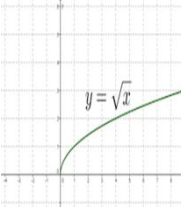
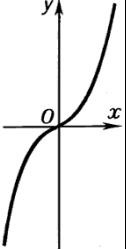
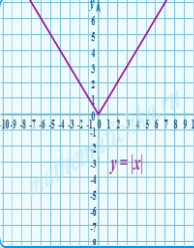
	$Y=kx+m$	$Y=ax^2+bx+c$	$y=\frac{k}{x}$	$Y=\sqrt{x}$	$Y=x^3$	$Y= x $
Эскиз графика						
1. D(f)	R	R	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	R
2. E(f)	R	$[y(x_0); +\infty),$ $a > 0.$ $(-\infty; y(x_0)],$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	$[0; +\infty)$

		$a < 0$.				
3. Монотонность, промежутки возрастания и убывания	Монотонна. ↑ при $k > 0$, ↓ при $k < 0$.	При $a > 0$, ↓ при $x \in (-\infty; x_0]$, ↑ при $x \in [x_0; +\infty)$. При $a < 0$ возрастание и убывание наоборот	Монотонна на $D(f)$ ↓ при $k > 0$, ↑ при $k < 0$	Возрастающая	Возрастающая	↑ при $x \geq 0$, ↓ при $x \leq 0$

4. Четность. На графике четность и нечетность определить достаточно легко. График четной функции симметричен относительно оси Y . График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Если ни той, ни другой симметрии не наблюдается, то функция общего вида.

Аналитически определяем четность/нечетность таким образом:

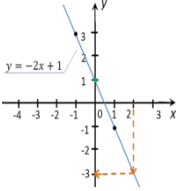
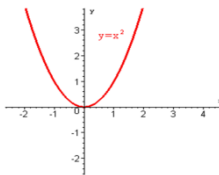
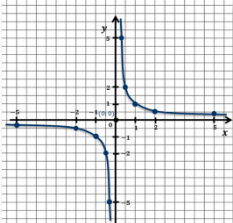
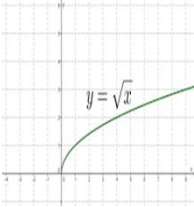
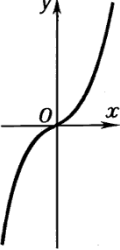
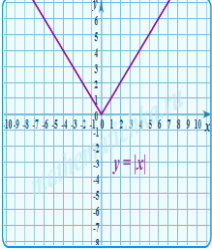
- Для четной функции выполняется равенство $f(x) = f(-x)$. То есть, при подстановке в функцию двух взаимно противоположных значений x значение функции будет одинаковым.
- Для нечетной функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. То есть, при подстановке в функцию двух взаимно противоположных значений x значения функции будут противоположными.
- Если ни то, ни другое равенство не выполняется, то функция общего вида.

	$Y = kx + m$	$Y = ax^2 + vx + c$	$Y = \frac{k}{x}$	$Y = \sqrt{x}$	$Y = x^3$	$Y = x $
Эскиз графика						
3. $D(f)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	\mathbb{R}	\mathbb{R}

4. E(f)	\mathbb{R}	$[y(x_0); +\infty),$ $a > 0.$ $(-\infty; y(x_0)],$ $a < 0.$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	\mathbb{R}	$[0; +\infty)$
3. Монотонность, промежутки возрастания и убывания	Монотонна. \uparrow при $k > 0,$ \downarrow при $k < 0.$	При $a > 0,$ \downarrow при $x \in$ $(-\infty; x_0],$ \uparrow при x $\in [x_0; +\infty).$ При $a < 0$ возрастание и убывание наоборот	Монотонна на $D(f)$ \downarrow при $k > 0,$ \uparrow при $k < 0$	Возрастающая	Возрастающая	\uparrow при $x \geq 0,$ \downarrow при $x \leq 0$
4. Четность	Общего вида. При $m=0$ функция нечетная.	Общего вида. При $b=c=0$ функция четная.	Нечетная	Общего вида	Нечетная	Четная

5. Ограниченность. Если у функции есть значение, меньше (больше) которого значений нет, то функция ограничена снизу (сверху). Функция, ограниченная и сверху, и снизу называется ограниченной. Если значения функции меняются от $-\infty$ до $+\infty$, то она неограниченная. Заполним пятое свойство.

	$Y=kx+m$	$Y=ax^2+bx+c$	$Y=\frac{k}{x}$	$Y=\sqrt{x}$	$Y=x^3$	$Y= x $
--	----------	---------------	-----------------	--------------	---------	---------

Эскиз графика						
1. D(f)	R	R	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	R
2. E(f)	R	$[y(x_0); +\infty),$ $a > 0.$ $(-\infty; y(x_0)],$ $a < 0.$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	$[0; +\infty)$
3. Монотонность, промежутки возрастания и убывания	Монотонна. \uparrow при $k > 0,$ \downarrow при $k < 0.$	При $a > 0,$ \downarrow при $x \in (-\infty; x_0],$ \uparrow при $x \in [x_0; +\infty).$ При $a < 0$ возрастание и убывание наоборот	Монотонна на D(f) \downarrow при $k > 0,$ \uparrow при $k < 0$	Возрастающая	Возрастающая	\uparrow при $x \geq 0,$ \downarrow при $x \leq 0$
4. Четность	Общего вида. При $m=0$ функция	Общего вида. При $v=c=0$ функция	Нечетная	Общего вида	Нечетная	Четная

	нечетная.	четная.				
5.Ограниченность	Неограниченна я	Ограничена сверху при $a < 0$, Ограничена снизу при $a > 0$	Неограниченная	Ограниченная снизу	Неограниченн ая	Ограниченная снизу

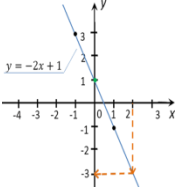
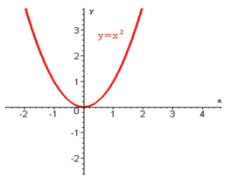
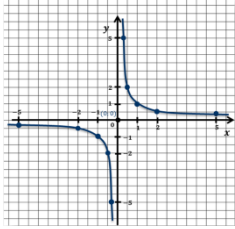
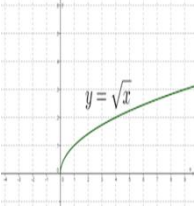
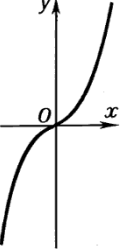
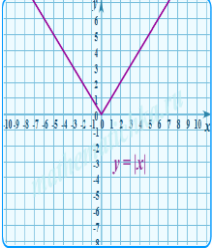
6. Точки экстремума.

Точку $x=x_0$ называют точкой минимума функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Значение функции в точке x_0 обозначают y_{\min}

Точку $x=x_0$ называют точкой максимума функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Значение функции в точке x_0 обозначают y_{\max} .

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином – точки экстремума.

	$Y=kx+m$	$Y=ax^2+bx+c$	$Y=\frac{k}{x}$	$Y=\sqrt{x}$	$Y=x^3$	$Y= x $
--	----------	---------------	-----------------	--------------	---------	---------

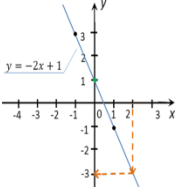
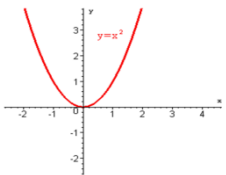
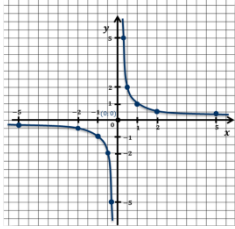
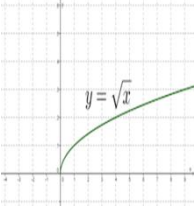
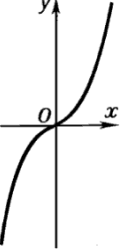
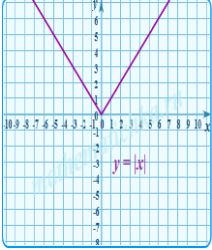
Эскиз графика						
1. D(f)	R	R	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	R
2. E(f)	R	$[y(x_0); +\infty),$ $a > 0.$ $(-\infty; y(x_0)],$ $a < 0.$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	$[0; +\infty)$
3. Монотонность, промежутки возрастания и убывания	Монотонна. \uparrow при $k > 0,$ \downarrow при $k < 0.$	При $a > 0,$ \downarrow при $x \in (-\infty; x_0],$ \uparrow при $x \in [x_0; +\infty).$ При $a < 0$ возрастание и убывание наоборот	Монотонна на D(f) \downarrow при $k > 0,$ \uparrow при $k < 0$	Возрастающая	Возрастающая	\uparrow при $x \geq 0,$ \downarrow при $x \leq 0$
4. Четность	Общего вида. При $m=0$ функция	Общего вида. При $v=c=0$ функция	Нечетная	Общего вида	Нечетная	Четная

	нечетная.	четная.				
5.Ограниченность	Неограниченна я	Ограничена сверху при $a < 0$, Ограничена снизу при $a > 0$	Неограниченна я	Ограниченная снизу	Неограниченная	Ограниченная снизу
6.Точки экстремума	Нет	Вершина параболы.	Нет	Нет	Нет	$X=0$

7. Наибольшее и наименьшее значение функции нужно искать в точках экстремума или на концах заданного промежутка.

8. Нули функции. Это значения x , при которых $y=0$. Чтобы найти нули функции, надо решить уравнение $y=0$.

	$Y=kx+m$	$Y=ax^2+bx+c$	$y=\frac{k}{x}$	$Y=\sqrt{x}$	$Y=x^3$	$Y= x $
--	----------	---------------	-----------------	--------------	---------	---------

Эскиз графика						
1. D(f)	R	R	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	R
2. E(f)	R	$[y(x_0); +\infty),$ $a > 0.$ $(-\infty; y(x_0)],$ $a < 0.$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	$[0; +\infty)$
3. Монотонность, промежутки возрастания и убывания	Монотонна. \uparrow при $k > 0,$ \downarrow при $k < 0.$	При $a > 0,$ \downarrow при $x \in (-\infty; x_0],$ \uparrow при $x \in [x_0; +\infty).$ При $a < 0$ возрастание и убывание наоборот	Монотонна на D(f) \downarrow при $k > 0,$ \uparrow при $k < 0$	Возрастающая	Возрастающая	\uparrow при $x \geq 0,$ \downarrow при $x \leq 0$
4. Четность	Общего вида. При $m=0$ функция	Общего вида. При $v=c=0$ функция	Нечетная	Общего вида	Нечетная	Четная

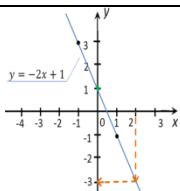
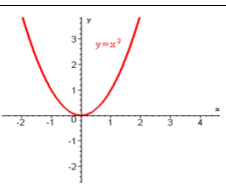
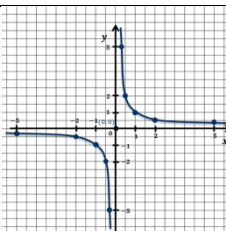
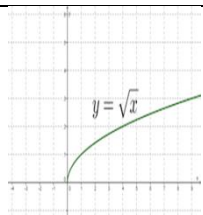
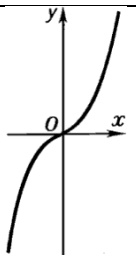
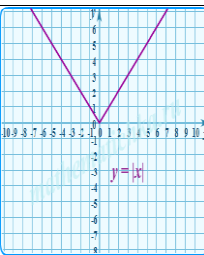
	нечетная.	четная.				
5.Ограниченность	Неограниченна я	Ограничена сверху при $a < 0$, Ограничена снизу при $a > 0$	Неограниченна я	Ограниченная снизу	Неограниченная	Ограниченная снизу
6.Точки экстремума	Нет	Вершина параболы.	Нет	Нет	Нет	$X=0$
7.Наибольшее, наименьшее значении функции	Нет	При $a > 0$ $Y(x_0)=y_{\text{наим}}$. Наибольшего значения нет. При $a < 0$ $Y(x_0)=y_{\text{наиб}}$. Наименьшего значения нет.	Нет	$y_{\text{наим}}=0$ Наибольшего значения нет	Нет	$y_{\text{наим}}=0$ Наибольшего значения нет

8.Нули функции	$X = -\frac{m}{k}$	x_1 и x_2	Нет	$X=0$	$X=0$	$X=0$
----------------	--------------------	---------------	-----	-------	-------	-------

9. Промежутки знакопостоянства. Это промежутки на оси X, на которых y имеет постоянный знак – только плюс или только минус.

10. Непрерывность. На данном этапе непрерывность будем определять так: Если график можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги, то функция непрерывна.

11. Периодичность. Если через какой-то промежуток значения функция начинают повторяться, то функция периодична. Среди выше рассмотренных функций таких нет.

	$Y=kx+m$	$Y=ax^2+bx+c$	$y=\frac{k}{x}$	$Y=\sqrt{x}$	$Y=x^3$	$Y= x $
Эскиз графика						
1. D(f)	R	R	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	R
2. E(f)	R	$[y(x_0); +\infty),$ $a > 0.$ $(-\infty; y(x_0)],$ $a < 0.$	$(-\infty; 0), (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	R	$[0; +\infty)$
3. Монотонность, промежутки	Монотонна.	При $a > 0,$ \downarrow при $x \in$	Монотонна на	Возрастающая	Возрастающая	\uparrow при $x \geq 0,$

возрастания и убывания	\uparrow при $k > 0$, \downarrow при $k < 0$.	$(-\infty; x_0]$, \uparrow при $x \in [x_0; +\infty)$. При $a < 0$ возрастание и убывание наоборот	$D(f)$ \downarrow при $k > 0$, \uparrow при $k < 0$			\downarrow при $x \leq 0$
4. Четность	Общего вида. При $m=0$ функция нечетная.	Общего вида. При $v=c=0$ функция четная.	Нечетная	Общего вида	Нечетная	Четная
5. Ограниченность	Неограниченна я	Ограничена сверху при $a < 0$, Ограничена снизу при $a > 0$	Неограниченная	Ограниченна я снизу	Неограниченная	Ограниченная снизу

6.Точки экстремума	Нет	Вершина параболы.	Нет	Нет	Нет	$X=0$
7.Наибольшее, наименьшее значения функции	Нет	При $a > 0$ $Y(x_0)=y_{\text{наим.}}$ Наибольшего значения нет. При $a < 0$ $Y(x_0)=y_{\text{наиб.}}$ Наименьшего значения нет.	Нет	$Y_{\text{наим}}=0$ Наибольшего значения нет	Нет	$Y_{\text{наим}}=0$ Наибольшего значения нет
8.Нули функции	$X=-\frac{m}{k}$	x_1 и x_2	Нет	$X=0$	$X=0$	$X=0$
9.Промежутки знакопостоянства	$k > 0$: $y > 0$ при $x > -\frac{m}{k}$; $y < 0$ при $x < -\frac{m}{k}$. $k < 0$: $y > 0$ при $x < -\frac{m}{k}$; $y < 0$ при $x > -\frac{m}{k}$	$a > 0$: $y > 0$ при $x > x_2$ и $x < x_1$; $y < 0$ при $x_1 < x < x_2$. $a < 0$: $y < 0$ при $x > x_2$ и $x < x_1$; $y > 0$ при	$k > 0$: $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$ $k < 0$: $y > 0$ при $x < 0$ $y < 0$ при $x > 0$.	$Y > 0$ При всех x кроме $x=0$	$y > 0$ при $x > 0$ $y < 0$ при $x < 0$	$Y > 0$ При всех x кроме $x=0$

	$-\frac{m}{k}$	$x_1 < x < x_2$				
10.Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная	Имеет разрыв при $x=0$	Непрерывная	Непрерывная	Непрерывная
11.Периодичность	Все функции не периодические					