

Занятие 52

Использование свойств и графиков функций при решении уравнений и неравенств. Метод интервалов. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

Цель. Уметь применять различные методы решения уравнений, неравенств и их систем.

Решить уравнение.

$$1 - x = 3^x$$

Это уравнение нельзя отнести ни к линейным, ни к показательным уравнениям.

Обратим внимание на то, что левая функция убывающая, а правая возрастающая.

Правила.

1. Строго монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз.
2. Если одна функция возрастает, а другая убывает на одном и том же промежутке, то графики их, либо только один раз пересекутся, либо вообще не пересекутся, а это означает, что уравнение $F(x)=G(x)$ имеет не более одного решения.
3. Если на некотором промежутке одна из функций убывает (возрастает), а другая принимает постоянные значения, то уравнение $F(x)=G(x)$ либо имеет единственный корень, либо не имеет корней.

Исходя из этих правил, наше уравнение либо имеет один корень, либо вообще не имеет корней.

Подбором находим, что $x=0$. $1 - 0 = 3^0$, $1=1$.

Ответ: $x=0$.

Решить уравнение:

$x^3 = 2 - x$. Находим корень подбором: $x=1$. Так как левая функция возрастающая, а правая убывающая, делаем вывод, что $x=1$ – единственный корень уравнения.

Потренируемся в решении неравенств методом интервалов.

$$1. \frac{(6-x)(x+2)(3x-3)}{(x-1)(x+3)^2} \geq 0$$

$$2. \frac{(2-3x)(4+x)(2+x)^3}{(1-x)(2x+4)} \leq 0$$

Рассмотрим решение уравнений с двумя переменными.

$$2x+3y=15$$

Правая часть делится на 3 и на 5. Левая тоже должна делиться на эти числа или одно из них.

3у на три делится. Чтобы 2х делилось на 3, сам х должен быть кратен трем.

Обозначим $x=3k$.

$$2 \cdot 3k + 3y = 15$$

$$6k + 3y = 15$$

$$y = \frac{15-6k}{3}; \quad y = 5-2k$$

$(3k; 5-2k)$ – это общее решение уравнение, где k – целое число.

Найдем несколько частных решений, подставляя различные значения k .

$$k=1, \quad (3; 3)$$

$$k=0, \quad (0; 5)$$

$$k=3, \quad (9; -1)$$

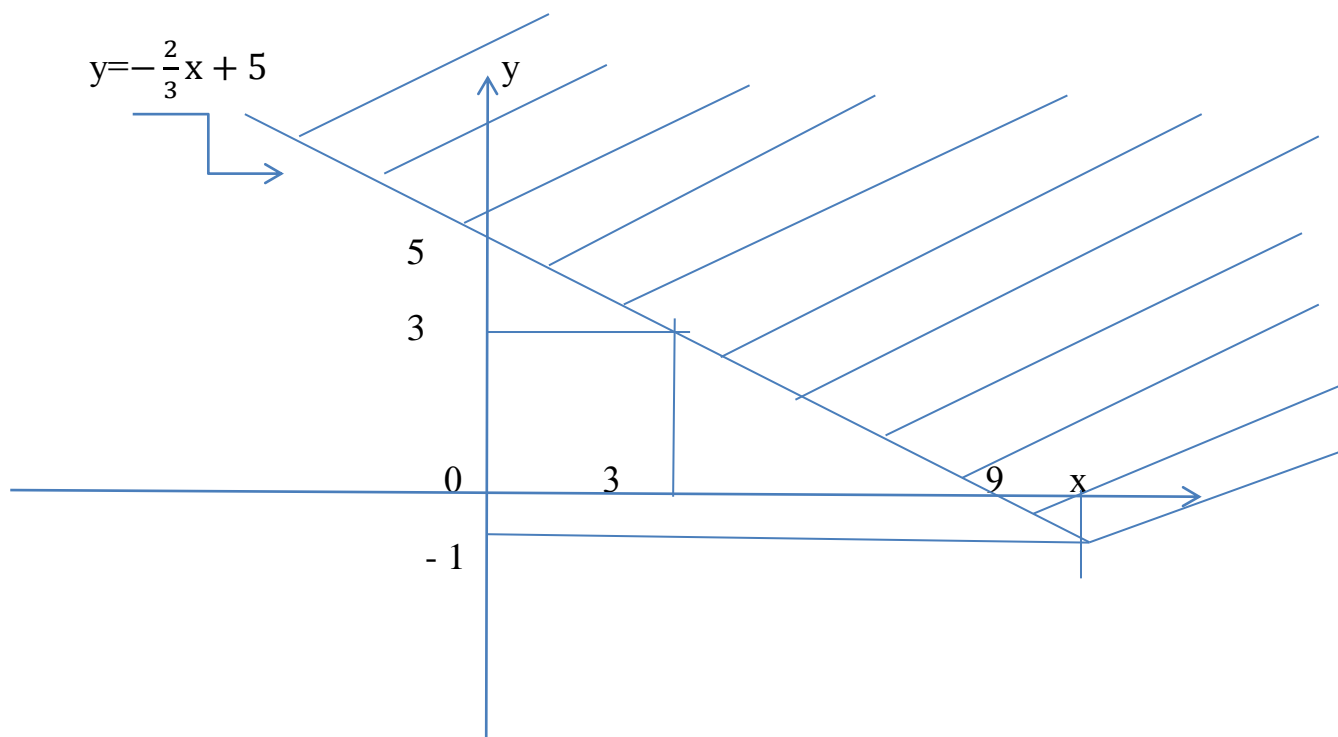
Изобразим решение этого уравнения на координатной плоскости.

Построим график функции $y = -\frac{2}{3}x + 5$ (выразили y)

Координаты всех точек этой прямой являются решением уравнения.

Решить неравенство: $2x+3y > 15$

При решении неравенства выполняем то же самое, что делали при решении уравнения. Затем показываем на координатной плоскости. При построении прямой использовались точки, найденные при решении уравнения.



Итак, прямая $y = -\frac{2}{3}x + 5$ есть геометрическое место точек, координаты которых представляют множество решений уравнения $2x + 3y = 15$.

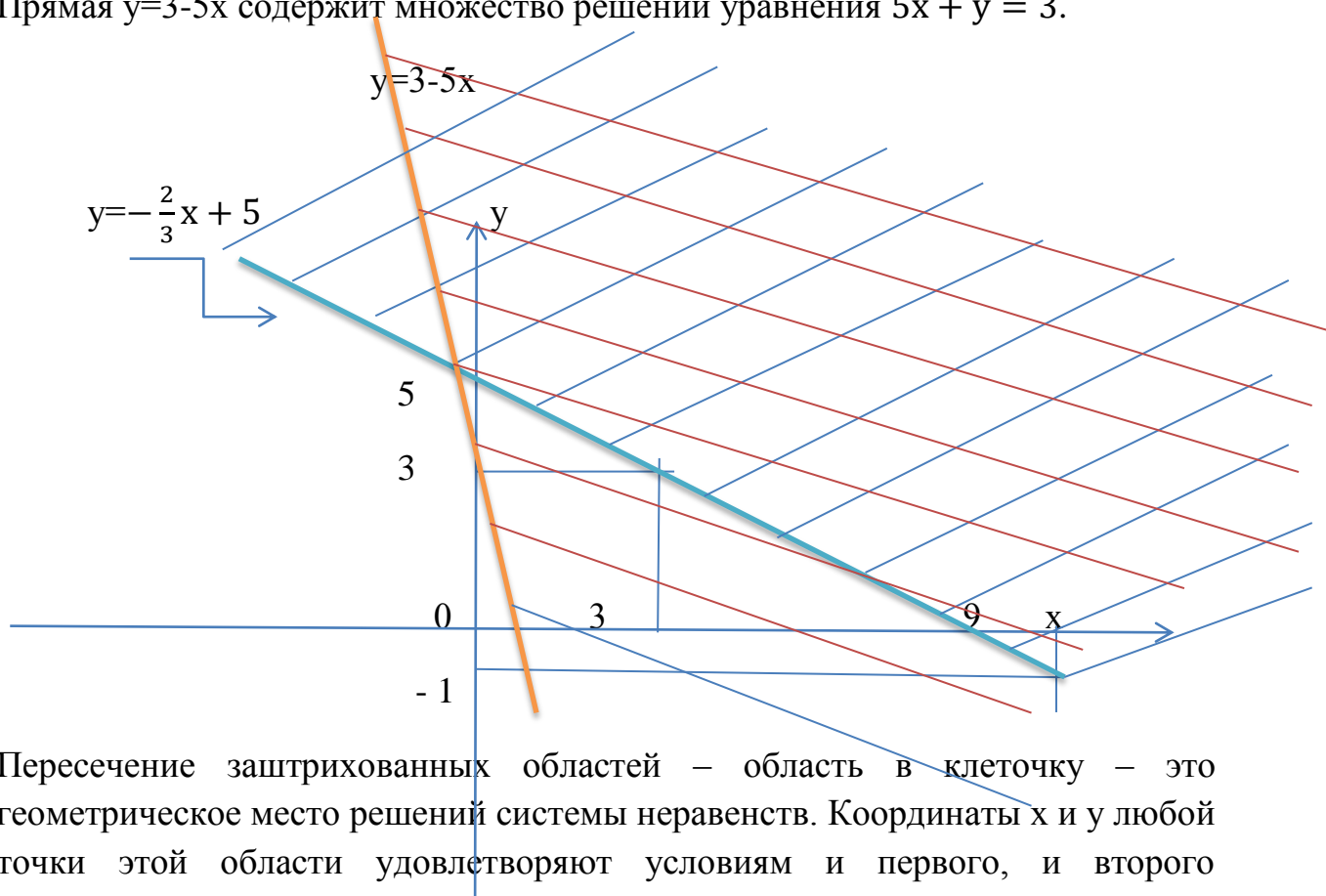
Заштрихованная область – геометрическое место точек, координаты которых представляют множество решений неравенства $2x + 3y > 15$

Рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 3y > 15 \\ 5x + y > 3 \end{cases}$$

Первое неравенство мы уже решили и показали его решение на координатной плоскости.

Прямая $y = 3 - 5x$ содержит множество решений уравнения $5x + y = 3$.



Пересечение заштрихованных областей – область в клеточку – это геометрическое место решений системы неравенств. Координаты x и y любой точки этой области удовлетворяют условиям и первого, и второго неравенства.