Занятие 10

Тема. Способы вычисления неопределенного интеграла.

Таблица неопределенных интегралов

I. $\int dx = x$. II. $\int (a+bx)^n dx = \dfrac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$ $(n \neq -1)$. III. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $(n \neq -1)$.

IV. $\int \dfrac{dx}{a+bx} = \dfrac{1}{b}\ln|a+bx|$. V. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x|$. VI. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$.

VII. $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \dfrac{2}{3b}(\sqrt{a+bx})^3$. VIII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$. IX. $\int e^x dx = e^x$.

X. $\int \ln x dx = x\ln x - x$. XI. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$. XII. $\int \cos x dx = \sin x$.

XIII. $\int \sin x dx = -\cos x$. XIV. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$. XV. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$.

Непосредственное интегрирование

Непосредственным интегрированием принято называть вычисление неопределенных интегралов путем приведения их к табличным с применением основных свойств.

Отметим, что если операция дифференцирования совершается формально, то далеко не так обстоит дело с интегрированием — например, нет формул для интегрирования произведения или частного функций. Поэтому существуют обширные таблицы интегралов (приведенная выше является весьма неполной) и возникает задача — так преобразовывать вычисляемые интегралы, чтобы их можно было свести к табличным.

Один из приемов, используемых при вычислении интегралов, называется ***методом замены переменных***. Он заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из табличных формул интегрирования.

Вычислить методом замены переменных интегралы:
1) $\int \operatorname{tg} x dx$; 2) $\int \sin(ax+b)dx$; 3) $\int \dfrac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$.

Для того, чтобы понять следующую информацию, рассмотрим обозначение производной. До сих пор мы с вами писали таким образом: y=sinx; y'=$(sinx)' = cosx$. Но давайте вспомним, что производная – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента. $f'(\text{x}) = \lim_{\Delta\text{x}\to 0}\frac{\Delta\text{y}}{\Delta\text{x}}$). Поэтому есть другая запись производной: $\text{y}' = \frac{dy}{dx}$. Здесь dy и dx –дифференциалы. И если мы взяли функцию y=sinx, то ее производная может быть записана следующим образом: $(sinx)'=\frac{d(sinx)}{dx}$.

Аналогично производная функции $y=x^2$ может быть записана $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$. Вычислить дифференциал – это практически то же самое, что найти производную. Знак дифференциала также используется в обозначении интеграла: $\int f(x)dx$.

Вернемся к заданию.

Вычислить методом замены переменных интегралы:
1) $\int \mathrm{tg}\, x dx$; 2) $\int \sin(ax+b)dx$; 3) $\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$.

Решение

1) Так как $\sin x dx = -d(\cos x)$, то

$$\int \mathrm{tg}\, x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Поясняю: 1 шаг – тангенс заменили на отношение синуса к косинусу; 2 шаг – sinx dx заменили на дифференциал косинуса со знаком минус. Практически мы внесли sinx под знак дифференциала, а раз мы его туда вносим, с ним надо «что-то сделать».

(Сравните: если в выражении $x\sqrt{x}$ мы будем вносить x под знак корня, то его надо возвести в квадрат, и получится $\sqrt{x^2x} = \sqrt{x^3}$)

3 шаг – минус вынесли за знак интеграла; 4 шаг - $\int \frac{d(cosx)}{cosx}$ похож на табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = ln|x|$.

Естественно, не забываем про знак минус и постоянную С. (Вспомните, что у каждой функции есть бесконечное множество первообразных, и они отличаются друг от друга на некоторое число).

Напоминаю задание:

Вычислить методом замены переменных интегралы:
1) $\int \mathrm{tg}\, x dx$; 2) $\int \sin(ax+b)dx$; 3) $\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$.

2) Так как $d(ax+b) = adx$, то $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$. Следовательно,

$$\int \sin(ax+b)dx = \int \sin(ax+b)\frac{1}{a}d(ax+b) = \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)d(ax+b) =$$
$$= -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$

3) Так как $xdx = \frac{1}{2}d(x^2+1)$, то

$$\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x^2+1) + C.$$

Метод замены переменной иначе называют методом подстановки.

При помощи подстановок $ax + b = u$ и $\frac{m}{k}x = u$ нетрудно вычислить следующие интегралы (постоянная C везде опущена и подразумевается):

I. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}$.

II. $\int g^{ax+b}dx = \frac{1}{a\ln g}g^{ax+b}$.

III. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$.

IV. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$.

V. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)$.

Отыскание функции по заданной производной или по дифференциалу — задача неопределенная, так как $f(x)dx$ означает множество первообразных функций вида $y = F(x) + C$, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым C; величина C может принимать любые числовые значения, если на первообразную функцию не наложено никаких начальных условий. Чтобы из множества первообразных функций выделить одну определенную функцию, должны быть заданы начальные условия. Под начальными условиями понимается задание частных значений x и y для первообразной функции $y = F(x) + C$, по которым находится определенное значение C, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Найти функцию, производная которой $y' = 2x - 3$, если при $x = 2$ эта функция принимает значение, равное 6.

Решение

Имеем $y' = 2x - 3$, или $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$, т. е. $dy = (2x - 3)dx$.

Интегрируя обе части последнего равенства, находим значение

$$\int dy = \int (2x - 3)dx;\; C_1 + y = x^2 - 3x + C_2.$$

Полагая $C_2 - C_1 = C$, получим $y = x^2 - 3x + C$. Нашли общее выражение функций, имеющих своей производной $y' = 2x - 3$.

Вычислим C при заданных значениях $x = 2$ и $y = 6$. Подставив в выражение для функции эти значения, получим $6 = 2^2 - 3 \cdot 2 + C$, откуда $C = 8$. Таким образом, функция, удовлетворяющая заданным начальным условиям, имеет вид $y = x^2 - 3x + 8$.

Метод интегрирования по частям

Рассмотрим функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, которые имеют непрерывные производные. Согласно свойствам дифференциалов, имеет место следующее равенство:

$$d(uv) = udv + vdu$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int d(uv) = \int (udv + vdu) \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu$$

Полученное равенство перепишем в виде:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Эта формула называется **формулой интегрирования по частям**. С ее помощью интеграл $\int udv$ можно свести к нахождению интеграла $\int vdu$, который может быть более простым.

Примеры решения интегралов данным методом

Пример

Задание. Найти интеграл $\int (x+1)e^{2x}dx$

Решение. В исходном интеграле выделим функции u и v, затем выполним интегрирование по частям.

$$\int (x+1)e^{2x}dx \quad \left\| \begin{matrix} u = x+1 & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right\| = (x+1) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx =$$

$$= \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + C =$$

$$= \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$$

Ответ. $\int (x+1)e^{2x}dx = \frac{(x+1)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$

Пример

Задание. Найти интеграл $\int x^2 \cos x dx$

Решение. В исходном интеграле выделим функции u и v, затем выполним интегрирование по частям. Для решения данного интеграла эту операцию надо повторить 2 раза.

$$\int x^2 \cos x dx \left\| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \cos x dx \\ du = 2x dx & v = \sin x \end{array} \right\| = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx =$$

$$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array}$$

$$= x^2 \sin x - 2 \left(x \cdot (-\cos) x - \int (-\cos x) dx\right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = \left(x^2 - 1\right) \sin x + 2x \cos x + C$$

Ответ. $\int x^2 \cos x dx = \left(x^2 - 1\right) \sin x + 2x \cos x + C$

Пример

Задание. Найти интеграл $\int \ln x dx$

Решение. В исходном интеграле выделим функции u и v, затем выполним интегрирование по частям.

$$\int \ln x dx \left\| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = x \end{array} \right\| = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Ответ. $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$