Занятие 13

Тема. Определенный интеграл. Основные понятия определенного интеграла. Геометрический и физический смысл определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла (формула Ньютона-Лейбница)

Уважаемые курсанты! Повторяем данный материал, конспектируем его в тетрадь, разбираем примеры. Высылать НЕ надо.

***Теорема.* Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Приведенную формулу обычно называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646—1716), получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно.

На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее называют иногда *двойной подстановкой*) и, соответственно, переписывают формулу Ньютона — Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Вычисляя определенный интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^{3} x^3dx$.

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^{3} x^3dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс.

Решение. Можно взять полуволну синусоиды от точки $x = 0$ до точки $x = \pi$ (рис. 228) и воспользоваться формулой (1) при следующих условиях: $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin x$. Получим:

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} =.$$

$$= -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$$

(в процессе вычислений мы учли, что первообразной для $\sin x$ является $-\cos x$).

Ответ: $S = 2$.

Опираясь на формулу Ньютона — Лейбница, можно получить два свойства определенного интеграла.

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$. Тогда

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x))\Big|_a^b =$$

$$= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

●

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$