Занятие 15

Тема. Применение основных численных методов для решения прикладных задач: вычисление определенного интеграла (вычисление определённого интеграла методом подстановки).

Один из приемов, используемых при вычислении интегралов, называется ***методом замены переменных***. Он заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по какой-либо из табличных формул интегрирования.

Метод замены переменной иначе называется **метод подстановки.**

Метод интегрирования **подстановкой** заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом заданный **интеграл** приводится к интегралу элементарной функции или к нему сводящемуся.

На неопределенных интегралах мы этот прием рассматривали.

Вычислить методом замены переменных интегралы:

1) $\int \operatorname{tg} x dx$;

Решение

1) Так как $\sin x dx = -d(\cos x)$, то

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

Поясняю: 1 шаг – тангенс заменили на отношение синуса к косинусу; 2 шаг – sinx dx заменили на дифференциал косинуса со знаком минус. Практически мы внесли sinx под знак дифференциала, а раз мы его туда вносим, с ним надо «что-то сделать».

(Сравните: если в выражении $x\sqrt{x}$ мы будем вносить х под знак корня, то его надо возвести в квадрат, и получится $\sqrt{x^2 x} = \sqrt{x^3}$)

3 шаг – минус вынесли за знак интеграла; 4 шаг - $\int \frac{d(cosx)}{cosx}$ похож на табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = ln|x|$.

Рассмотрим пример с определенным интегралом.

Вычислить:

$\int_3^8 \sqrt{x+1}dx$

Видим, что интегрируемая функция содержит x+1, а дифференциал только x.

Так как dx=d(x+1), осуществим эту замену. Напоминаю, что найти дифференциал – это практически то же, что найти производную.

$\int_3^8 \sqrt{x+1}d(x+1)= \int_3^8 (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1)=\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_3^8=\frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{4^3}\right)=\frac{2\cdot(27-8)}{3}=\frac{38}{3}.$

Рассмотрим еще один пример.

$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cdot\cos x^2 dx = \left|xdx = \frac{1}{2}dx^2\right| = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} cos\, x^2 dx^2$ =(Это похоже на формулу $\int \cos dx$)$=\frac{1}{2}\sin x^2 \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}(\sin\sqrt{\pi}^2 - \sin 0) = 0.$

Практическая работа №8

Вычислить интегралы методом подстановки (замены переменной)

1. $\int ctgxdx$
2. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$
3. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$
4. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx$

Выслать до 23.10