Занятие 23

Тема. Решение простых дифференциальных уравнений (линейных 1 порядка).

На предыдущих занятиях мы решали ДУ с разделяющимися переменными. Бывает так, что переменные нельзя разделить.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

В чём отличие однородных дифференциальных уравнений от других типов ДУ? Это проще всего сразу же пояснить на конкретном примере.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

В первую очередь необходимо проверить, а нельзя ли разделить переменные? Обычно такой анализ проводят мысленно или пытаются разделить переменные на черновике.

В данном примере **переменные разделить нельзя,** об этом говорит наличие множителя $e^{\frac{y}{x}}$.

Как понять, **является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение: **вместо** x подставляем λx, **вместо** y подставляем λy, **производную не трогаем**:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени: $\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки: $\lambda x \cdot y' = \lambda(y - xe^{\frac{y}{x}})$

и обе части делим на эту самую лямбду: $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

В результате **все** лямбды исчезли, и мы получили исходное уравнение.

Вывод: Данное уравнение является однородным

Решение однородного дифференциального уравнения.

Потребуется осуществить стандартную замену переменной.

Функцию «игрек» следует **заменить произведением** некоторой функции t *(тоже зависящей от «икс»)* и «икса»:

$y = t(x) \cdot x$, почти всегда пишут коротко: $y = tx$

Выясняем, во что превратится производная y' при такой замене, используем правило дифференцирования произведения. Если $y = tx$, то: $y' = (tx)' = (t)'x + t(x)' = t'x + t$

Подставляем $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$:

$$x(t'x + t) = tx - xe^{\frac{tx}{x}}$$

После данной замены и проведенных упрощений мы гарантировано получим уравнение с разделяющимися переменными.

После подстановки проводим максимальные упрощения:
$$x(t'x + t) = x(t - e^{t})$$
$$t'x + t = t - e^{t}$$
$$t'x = -e^{t}$$

Далее решаем **уравнение с разделяющимися переменными**.

Поскольку t – это функция, зависящая от «икс», то её производную можно записать стандартной дробью: $t' = \frac{dt}{dx}$.

Таким образом:
$$x\frac{dt}{dx}=-e^{t}$$
Разделяем переменные, при этом в левой части нужно собрать только «тэ», а в правой части – только «иксы»:
$$-e^{-t}dt=\frac{dx}{x}$$
Переменные разделены, интегрируем:
$$-\int e^{-t}dt=\int\frac{dx}{x}$$
$$e^{-t}=\ln|x|+\ln|C|$$
После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести *обратную замену*, она тоже стандартна и единственна:

Если $y=tx$, то $t=\frac{y}{x}$

В данном случае: $e^{-\frac{y}{x}}=\ln|Cx|$

В 18-19 случаях из 20 решение однородного уравнения записывают в виде общего интеграла.

Ответ: общий интеграл: $e^{-\frac{y}{x}}=\ln|Cx|$, где $C=const$

Почему почти всегда ответ однородного уравнения даётся в виде общего интеграла?
В большинстве случаев невозможно выразить «игрек» в явном виде (получить общее решение), а если и возможно, то чаще всего общее решение получается громоздким и корявым.

Пример 4.

Решить дифференциальное уравнение (2x+y)dx−xdy=0.

1. Проверим, можно ли разделить переменные. Нельзя.
2. Проверим, является ли уравнение однородным.

$(2\lambda x+\lambda y)dx-\lambda xdy=0\ \rightarrow\lambda(2x+y)dx-\lambda xdy=0\rightarrow\lambda\big((2x+y)dx-$ $-xdy\big)=0$. Разделим на λ обе части уравнения. Получим исходное исходное уравнение.

3. y=tx $\to y' = t'x + x't = t'x + t = \frac{dy}{dx}$. Зачем нужен последний шаг? Дело в том, что в нашем уравнении нет y'. Мы можем его получить, разделив уравнение на dx: 2x+y$-x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$. (Примечание: уравнение 2x+y$-x \cdot y' = 0$ и исходное уравнение – это одно и то же уравнение)

4. Подставляем: 2x+tx – x$(t'x + t) = 0$.

Раскрываем скобки и преобразовываем: 2x+tx – x$t'x - xt = 0$.→

2x – $x^2 t' = 0$ →2x – $x^2 \frac{dt}{dx} = 0$.

5. Разделяем переменные: 2x =$x^2 \frac{dt}{dx}$; умножим обе части на $\frac{dx}{x^2} \to \frac{2xdx}{x^2} = dt \to$

$\frac{2dx}{x} = dt$. Получили уравнение с разделенными переменными. (x$\neq 0$)

6. Интегрируем обе части.

$\int \frac{2dx}{x} = \int dt$

$2ln|x|$ =t или t=2ln$|x|$+C

7. Возвращаемся к исходным переменным. y=tx, t=$\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = 2ln|x| + C$$

y=x$(\boldsymbol{2ln}|\boldsymbol{x}| + \boldsymbol{C})$

Примеры однородных ДУ

1. $(x - y)dx - xdy = 0$
2. (2x+y)dx-xdy=0
3. $xy' = y + xtg\frac{y}{x}$

Практическая работа №11

Решить однородные дифференциальные уравнения

1. $x - y = xy'$
2. 2x+y=xy'
3. 2x$y' - y = 2x$