Занятие 25

Тема. Решение простых дифференциальных уравнений (2 порядка допускающих понижение порядка).

Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Метод повторного интегрирования правой части

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$, где $y^{(n)}$ – производная «энного» порядка, а правая часть $f(x)$ зависит *только от «икс»*. В простейшем случае $f(x)$ может быть константой.

Данное дифференциальное уравнение решается последовательным интегрированием правой части. Причём интегрировать придется ровно n раз.

На практике наиболее популярной разновидность является уравнение второго порядка: $y'' = f(x)$. Дважды интегрируем правую часть и получаем общее решение. Уравнение третьего порядка $y''' = f(x)$ необходимо проинтегрировать трижды, и т.д.

Пример 1

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' = x^2 - 2x$

Решение: Данное дифференциальное уравнение имеет вид $y'' = f(x)$.

Понижаем степень уравнения до первого порядка: $y' = \int (x^2 - 2x)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$

Или короче: $y' = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1$, где C_1 – константа

Теперь интегрируем правую часть еще раз, получая общее решение: $y = \int\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1\right)dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$

Ответ: общее решение: $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$, где $C_1, C_2 - const$

Проверить общее решение такого уравнения обычно очень легко. В данном случае необходимо лишь найти вторую производную:

$$y' = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2\right)' = \frac{1}{12}\cdot 4x^3 - \frac{1}{3}\cdot 3x^2 + C_1 + 0 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1$$

$$y'' = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + C_1\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2x + 0 = x^2 - 2x$$

Получено исходное дифференциальное уравнение $y'' = x^2 - 2x$, значит, общее решение найдено правильно.

Пример 2

Решить дифференциальное уравнение $y'' + \sin 2x = \sqrt{x}$

Решение: *Преобразуем уравнение:* $y'' = \sqrt{x} - \sin 2x$ *Данное ДУ имеет вид* $y'' = f(x)$*. Дважды интегрируем правую часть:*

$$y' = \int (x^{\frac{1}{2}} - \sin 2x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x + C_1$$

$$y = \int\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right)dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C_1x + C_2 = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2$$

Ответ: *общее решение:* $y = \frac{4}{15}\sqrt{x^5} + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2,\ \text{где}\ \ C_1, C_2 - const$

Пример 3

Найти частное решение уравнения, соответствующее заданным начальным условиям

$y''' = e^{2x}$

$y(0) = \frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{1}{2}$

Решение: Данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$. Согласно алгоритму, необходимо последовательно три раза проинтегрировать правую часть.

Сначала понижаем степень уравнения до второго порядка: $y'' = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$

Первый интеграл принёс нам константу C_1. В уравнениях рассматриваемого типа рационально **сразу же** применять подходящие начальные условия.

Итак, у нас найдено $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, и, очевидно, к полученному уравнению подходит начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$.

В соответствии с начальным условием $y''(0) = -\frac{1}{2}$: $y''(0) = \frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = -1$

Таким образом: $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$

На следующем шаге берём второй интеграл, понижая степень уравнения до первого порядка:
$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} - x + C_2$$

Появилась константа C_2, которую мы тоже найдем.

В соответствии с начальным условием $y'(0) = \frac{1}{4}$ $y'(0) = \frac{1}{4} - 0 + C_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = 0$

Таким образом: $y' = \frac{1}{4}e^{2x} - x$

И, наконец, третий интеграл:

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} - x\right)dx = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + C_3$$

Для третьей константы используем последнее условие $y(0) = \frac{9}{8}$:
$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + C_3 = \frac{9}{8} \Rightarrow C_3 = 1$$

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1$

Выполним проверку. Проверяем начальное условие $y(0) = \frac{9}{8}$: $y(0) = \frac{1}{8} - 0 + 1 = \frac{9}{8}$ – выполнено.

Находим производную:
$$y' = \left(\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1\right)' = \frac{1}{8} \cdot 2e^{2x} - \frac{2x}{2} + 0 = \frac{1}{4}e^{2x} - x$$

Проверяем начальное условие $y'(0) = \frac{1}{4}$: $y'(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ – выполнено.

Находим вторую производную: $y'' = \left(\frac{1}{4}e^{2x} - x\right)' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$

Проверяем начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$: $y''(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ – выполнено.

Найдем третью производную: $y''' = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1\right)' = e^{2x} - 0 = e^{2x}$ Получено исходное дифференциальное уравнение $y''' = e^{2x}$

Вывод: задание выполнено верно

Наверное, все обратили внимание на следующую вещь: **каков порядок уравнения – столько и констант**.

Пример 4

Найти частное решение уравнения, соответствующее заданным начальным условиям

$x^3 y''' = 6$

$y(1) = 0$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = 1$

Преобразуем уравнение: $y''' = \dfrac{6}{x^3}$

Данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$*. Трижды интегрируем правую часть:*

$$y'' = 6\int \frac{dx}{x^3} = 6 \cdot \frac{1}{(-2x^2)} + C_1 = -\frac{3}{x^2} + C_1$$

В соответствии с начальным условием:
$y''(1) = -3 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 4$

$$y' = \int \left(-\frac{3}{x^2} + 4\right)dx = \frac{3}{x} + 4x + C_2$$

В соответствии с начальным условием:
$y'(1) = 3 + 4 + C_2 = 5 \Rightarrow C_2 = -2$

$$y = \int \left(\frac{3}{x} + 4x - 2\right)dx = 3\ln|x| + 2x^2 - 2x + C_3$$

В соответствии с начальным условием:
$y(1) = 0 + 2 - 2 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

Ответ: *частное решение:* $y = 3\ln|x| + 2x^2 - 2x$

Пример 5

Решить дифференциальное уравнение $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$

Решение: В данном уравнении третьего порядка в явном виде не участвуют функция y и первая производная y'

Введем переменную $y'' = z$

Если $y'' = z$, то $y''' = z'$

Таким образом, уравнение понижено до первого порядка: $(1 + \sin x)z' = \cos x \cdot z$

Получено **уравнение с разделяющимися переменными**, разделяем переменные и интегрируем:

$$(1+\sin x)\frac{dz}{dx}=\cos x\cdot z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{\cos x dx}{(1+\sin x)}$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int\frac{d(1+\sin x)}{(1+\sin x)}$$

$$\ln|z|=\ln|1+\sin x|+\ln|C_1|$$

$$\ln|z|=\ln|C_1(1+\sin x)|$$

$$z=C_1(1+\sin x)$$

Проведем обратную замену: $z=y''$ $y''=C_1(1+\sin x)$

Данное уравнение имеет вид: $y''=f(x)$.

Дважды интегрируем правую часть:

$$y'=\int C_1(1+\sin x)dx=C_1(x-\cos x)+C_2$$

$$y=\int(C_1(x-\cos x)+C_2)dx=C_1\left(\frac{x^2}{2}-\sin x\right)+C_2x+C_3$$

Ответ: общее решение: $y=C_1\left(\frac{x^2}{2}-\sin x\right)+C_2x+C_3$, где $C_1, C_2, C_3-const$