Занятие 29

Тема. Применение основных численных методов для решения прикладных задач: исследование на сходимость рядов с положительными членами.

Напомню некоторые теоретические моменты:

Теорема 1 **(необходимый признак сходимости ряда).** Если ряд сходится, то его *n*-й член стремится к нулю при $n \to \infty$.

Но если *n*-й член стремится к нулю при $n \to \infty$, то не факт, что ряд сходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

*****Достаточные признаки сходимости***

Теорема 1 **(признак сравнения).** Если члены двух числовых рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ удовлетворяют неравенству $a_n \le b_n$ для любых *n*, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого ряда. Из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда.

Иными словами, если ряд с меньшими членами расходится, то ряд с большими членами тоже расходится.

Теорема 2 **(признак Даламбера).** Если для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ существует конечный предел отношения последующего члена ряда к предыдущему

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, то:

а) при $\ell < 1$ ряд сходится;

б) при $\ell > 1$ ряд расходится;

в) при $\ell = 1$ вопрос о сходимости открыт.

Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n+2}$

Во-первых, проверяем (мысленно либо на черновике) выполнение необходимого признака сходимости: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+2} = 0$, а значит, «отделаться малой кровью» не удалось.

Из теории известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится

Для всех натуральных номеров $n = 1,2,3,\ldots$ справедливо очевидное неравенство:
$n^2+n+2 > n^2$

а бОльшим знаменателям соответствуют мЕньшие дроби: $\frac{1}{n^2+n+2} \le \frac{1}{n^2}$, значит, по признаку сравнения исследуемый ряд **сходится** вместе с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Готово.

Если у вас есть какие-то сомнения, то неравенство всегда можно расписать подробно! Распишем построенное неравенство для нескольких номеров «эн»:

Если $n=1$, то $\frac{1}{4} < 1$

Если $n=2$, то $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$

Если $n=3$, то $\frac{1}{14} < \frac{1}{9}$

Если $n=4$, то $\frac{1}{22} < \frac{1}{16}$

….

и теперь-то уж совершенно понятно, что неравенство $\frac{1}{n^2+n+2} \le \frac{1}{n^2}$ выполнено для всех натуральных номеров «эн».

Проанализируем признак сравнения и решенный пример с неформальной точки зрения. Все-таки, почему ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$ сходится? А вот почему. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то он имеет некоторую *конечную* сумму S

: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=S$. И поскольку все члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$ **меньше** соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, то ясен пень, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$ не может быть больше числа S, и тем более, не может равняться бесконечности!

Аналогично можно доказать сходимость «похожих» рядов: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+5}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+3}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+2n^2+3n+7}$ и т.д.

! Обратите внимание, что во всех случаях в знаменателях у нас находятся «плюсы». Наличие хотя бы одного минуса может серьёзно осложнить использование рассматриваемого *признака сравнения*. Например, если ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$ таким же образом сравнить со сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (выпишите несколько неравенств для первых членов), то условие $a_n \le b_n$ не будет выполняться вообще! Здесь можно извернуться и подобрать для сравнения другой сходящийся ряд, например, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$, но это повлечёт за собой лишние оговорки и другие ненужные трудности. Поэтому для доказательства сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$ гораздо проще использовать *предельный признак сравнения*.

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Используем предельный признак сравнения. Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходится. Если нам удастся показать, что $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ равен *конечному, отличному от нуля* числу, то будет доказано, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$ – тоже сходится.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2-(n+1)}}{\frac{1}{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{(n+1)^2-(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$$

Ряд сходится.