Занятие 9

Уважаемые курсанты! Тема сегодняшнего занятия для вас не нова. Этот материал вы изучали во втором семестре 1 курса. Но так как половина обучения в прошлом семестре была дистанционно, в данном файле я даю достаточно подробную информацию по теме. Внимательно изучите материал, перепишите в тетрадь примеры, записывая, к какому правилу они относятся. Восстановите или найдите в интернете таблицу первообразных и запишите ее в тетрадь для справочных материалов. Напоминаю, что этой тетрадью вы сможете открыто воспользоваться на экзамене. Отсылать записи этого занятия не надо.

Тема. Первообразная. Неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов. Метод непосредственного интегрирования. Метод интегрирования заменой переменной. Метод интегрирования по частям

Определение. Функцию $y = F(x)$ называют первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке X, если для $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

На практике промежуток X обычно не указывают, но подразумевают (в качестве естественной области определения функции).

Приведем примеры.

1) Функция $y = x^2$ является первообразной для функции $y = 2x$, поскольку для любого x справедливо равенство $(x^2)' = 2x$.

2) Функция $y = x^3$ является первообразной для функции $y = 3x^2$, поскольку для любого x справедливо равенство $(x^3)' = 3x^2$.

3) Функция $y = \sin x$ является первообразной для функции $y = \cos x$, поскольку для любого x справедливо равенство $(\sin x)' = \cos x$.

4) Функция $y = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; +\infty)$, поскольку для любого $x > 0$ справедливо равенство $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Каждая функция имеет бесконечное множество первообразных, и отличаются они друг от друга постоянно С. Функции $y=x^2+4$, $y=x^2+7$ и т.п., то есть функции вида $y=x^2+C$ являются первообразными для функции $y=2x$, так как их производная равна $2x$.

Совокупность первообразных функции называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$=F(x) +C

Правила вычисления первообразных.

Правило 1. *Первообразная суммы равна сумме первообразных.*

Обращаем ваше внимание на некоторую «легковесность» этой формулировки. На самом деле следовало бы сформулировать теорему: *если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют на промежутке X первообразные соответственно $y = F(x)$ и $y = G(x)$, то сумма функций $y = f(x) + g(x)$ имеет на промежутке X первообразную, причем одной из этих первообразных является функция $y = F(x) + G(x)$.* Но обычно, формулируя правила (а не теоремы), оставляют только ключевые слова — так удобнее для применения правила на практике.

Пример 2. Найти первообразную для функции $y = 2x + \cos x$.

Решение. Первообразной для $2x$ служит x^2; первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$. Значит, первообразной для функции $y = 2x + \cos x$ будет служить функция $y = x^2 + \sin x$ (и вообще любая функция вида $y = x^2 + \sin x + C$).

Правило 2. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$,* то *$kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.*

Пример 3. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = 5\sin x$; б) $y = -\frac{\cos x}{3}$; в) $y = 12x^3 + 8x - 1$.

Решение. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = 5\sin x$ первообразной будет функция $y = -5\cos x$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = -\frac{1}{3}\cos x$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{3}\sin x$.

в) Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$; первообразной для x служит $\frac{x^2}{2}$; первообразной для функции $y = 1$ служит функция $y = x$.

Используя первое и второе правила нахождения первообразных, получим, что первообразной для функции $y = 12x^3 + 8x - 1$ служит функция $y = 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 8 \cdot \frac{x^2}{2} - x$, т. е. $y = 3x^4 + 4x^2 - x$.

Правило 3.

Теорема 1. **Если $y = F(x)$ — первообразная для функции $y = f(x)$, то первообразной для функции $y = f(kx + m)$ служит функция $y = \frac{1}{k}F(kx + m)$.**

Пример 4. Найти первообразные для заданных функций:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos \frac{x}{3}$; в) $y = (4 - 5x)^7$; в) $y = e^{\frac{2x-1}{3}}$.

Р е ш е н и е. а) Первообразной для $\sin x$ служит $-\cos x$; значит, для функции $y = \sin 2x$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x)$, т. е. $y = -\frac{\cos 2x}{2}$.

б) Первообразной для $\cos x$ служит $\sin x$; значит, для функции $y = \cos \frac{x}{3}$ первообразной будет функция $y = 3 \sin \frac{x}{3}$; здесь $k = \frac{1}{3}$, значит, $\frac{1}{k} = 3$.

в) Первообразной для x^7 служит $\frac{x^8}{8}$; значит, для функции $y = (4 - 5x)^7$ первообразной будет функция $y = -\frac{1}{5} \cdot \frac{(4-5x)^8}{8}$, т. е. $y = -\frac{1}{40} \cdot (4 - 5x)^8$.

г) Выражение $\frac{2x-1}{3}$ можно представить в виде $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$. Первообразной для e^x служит e^x, значит, для функции $y = e^{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$ первообразной будет функция $y = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot e^{\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$, т. е. $y = \frac{3}{2} e^{\frac{2x-1}{3}}$.

Новый материал

Интегрирование методом замены переменной

Пример 1

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. $\int \sin(3x+1)dx$

Находим в таблице интегралов похожую формулу: $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Но проблема заключается в том, что у нас под синусом не просто «икс», а сложное выражение. Что делать?

Подводим функцию $(3x+1)$ под знак дифференциала: $\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$

Как мы пришли к мысли, что на первом шаге нужно записать наш интеграл именно так: $\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$?

Формула $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (и все другие табличные формулы) справедливы и применимы НЕ ТОЛЬКО для переменной x, но и для любого сложного выражения ЛИШЬ БЫ АРГУМЕНТ ФУНКЦИИ (**$3x+1$ – в нашем примере)** И ВЫРАЖЕНИЕ ПОД ЗНАКОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛА БЫЛИ ОДИНАКОВЫМИ**.**

Откуда взяли $\frac{1}{3}$ перед интегралом? Дело в том, что если мы раскроем дифференциал d(3x+1), то получим 3dx, а в исходной функции было просто dx. Поэтому чтобы подынтегральная функция не изменилась, надо ее домножить на $\frac{1}{3}$ (Кстати, раскрыть дифференциал – это формально почти то же самое, что найти производную).

Теперь можно пользоваться табличной формулой $\int \sin x dx = -\cos x + C$:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \text{ где } C = const$$

Выполним проверку. Открываем таблицу производных и дифференцируем ответ:

$$\left(-\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C\right)' = -\frac{1}{3}(\cos(3x+1))' + (C)' =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(-\sin(3x+1))\cdot(3x+1)' + 0 = \frac{1}{3}\sin(3x+1)\cdot(3+0) = \sin(3x+1)$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл

Пример 2

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку. $\int \frac{dx}{5-2x}$

Анализируем подынтегральную функцию. Здесь у нас дробь, причем в знаменателе линейная функция (с «иксом» в первой степени). Смотрим в таблицу интегралов и находим наиболее похожую вещь: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Подводим функцию $5-2x$ под знак дифференциала: $\int \frac{dx}{5-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5-2x)}{5-2x}$

Те, кому трудно сразу сообразить, на какую дробь нужно домножать, могут быстренько на черновике раскрыть дифференциал: $d(5-2x) = (5-2x)'dx = (0-2)dx = -2dx$. Ага, получается $-2dx$, значит, чтобы ничего не изменилось, мне надо домножить интеграл на $-\frac{1}{2}$.

Далее используем табличную формулу $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$: $\int \frac{dx}{5-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5-2x)}{5-2x} = -\frac{1}{2}\ln|5-2x| + C,\ \textit{где } C = const$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2}\ln|5-2x| + C\right)' = -\frac{1}{2}(\ln|5-2x|)' + (C)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(5-2x)}\cdot(5-2x)' + 0 = -\frac{1}{2(5-2x)}\cdot(0-2) = \frac{1}{(5-2x)}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.