Занятие№20,21

В занятии №20,21 изложен учебный материал по разделу **Дифференциальные уравнения.** В тетради сделайте подробный конспект. На конференции продолжим работать по этой теме. На конференции 06.11.20 было 16 курсантов, с которыми была установлена обратная связь. Кто систематически не присутствует на конфер. не будет иметь хороших оценок.

Раздел 2.Основы теории дифференциальных уравнений.

Тема 2.1.Основы теории дифференциальных уравнений.

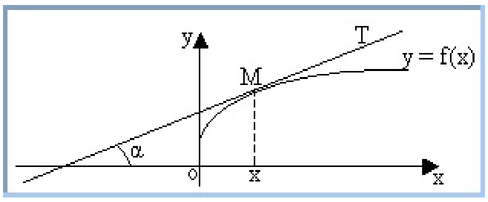
Задачи, приводящие к понятию дифференциальных уравнений. Общее и частное решение. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения 1 порядка.

Задачи, приводящие к понятию дифференциальных уравнений.

Многие процессы в природе можно описать с помощью функции. Дифференциальное исчисление позволяет по данной функции исследовать ее свойства. Не менее важна и обратная задача: по данным свойствам функции найти эту функцию. Иными словами, исследуя процесс, найти функцию, которая его описывает. В алгебре для нахождения неизвестных величин пользуются уравнениями: по условию задачи составляют соотношение, связывающее неизвестную величину с данными и, решая его, находят неизвестную. Аналогично в анализе для нахождения неизвестной функции по данным ее свойствам составляют уравнение, связывающее неизвестную величину с величинами, задающими ее свойство. Поскольку свойства выражаются через производные или дифференциалы того или иного порядка, приходят к соотношению, связывающему функцию, ее производные или дифференциалы. Это соотношение называется *дифференциальным уравнением*, решая его, находят искомую функцию.

Рассмотрим задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения.

Задача 1. На плоскости XOY найти кривую, которая в каждой своей точке имеет касательную, образующую с положительным направлением оси Ox угол, тангенс которого равен удвоенной абсциссе точки касания.



Решение. Пусть уравнение искомой кривой y = f (x).

Обозначим через α угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси Ox. Как известно, угловой коэффициент касательной MT есть tg α, и он равен производной от y по x, так что

$\operatorname{tg} \alpha = y'$ (1.1)

С другой стороны, по условию задачи имеем

$\operatorname{tg} \alpha = 2x$.   (1.2) Приравнивая значения tg α, определяемые формулами (1.1) и (1.2) получим

$y' = 2x$.   (1.3)

Решением дифференциального уравнения (1.3) является любая первообразная для функции 2x. Например, решением будет

y = x2. (1.4)

Как известно из интегрального исчисления, все первообразные для функции 2x и, следовательно, все решения дифференциального уравнения (1.3) даются формулой

y = x2 + C, (1.5)

где C — произвольная постоянная.

Дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, т.е. условию задачи удовлетворяет не одна кривая, а целое семейство кривых — парабол. Но если в условие задачи добавить точку M0 (x0, y0), через которую проходит искомая кривая, то получим единственную кривую. Для этого достаточно заменить в уравнении (1.5) координаты x и y координатами точки M0

y0 = x2 + C. (1.6)

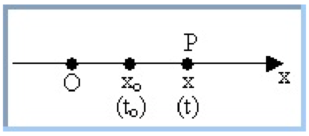
и, найдя из полученного уравнения значение произвольной постоянной C, подставить его в уравнение (1.5). Выполняя указанные выкладки, имеем:

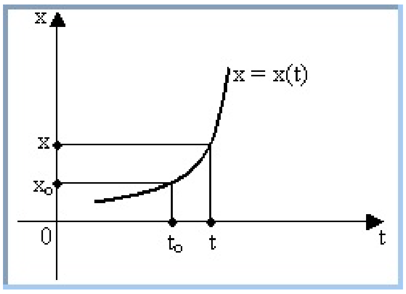
C = y0 – , y = x2 – + y0.

Таким образом, искомой кривой будет парабола

y = x2 – + y0.

Задача 2. Предположим, что материальная точка P движется по прямой, которую принимаем за ось Ox. Пусть известна скорость движения как функция от времени t; обозначим ее через f (t) и будем предполагать, что она непрерывна при всех рассматриваемых значениях времени t. Требуется найти закон движения точки, т. Е. зависимость x от t, x = x(t), если известно, что в некоторый момент времени t0 точка занимает положение x0, так что x(t0) = x0





Решение. Известно, что скорость движения рассматриваемой точки в момент времени t равна производной от x по t. С другой стороны, эта скорость равна f (t). Поэтому

dx/dt = f (t). (1.7)

Равенство (1.7) есть дифференциальное уравнение движения рассматриваемой точки. Оно задает закон движения в дифференциальной форме. Интегрируя уравнение (1.7), найдем закон движения в конечной форме.

Интегрирование уравнения (1.7) состоит в нахождении всех первообразных для функции f (t), которые, как известно из интегрального исчисления, могут быть записаны в виде

x =∫f(t) dt + C. (1.8)

Выделим решение (движение), в котором

x = x0 при t = t0. (1.9)

Для этого положим в формуле (1.8) t = t0, x = x0. Получи

x0 = ∫f(t) dt +Место для формулы. C,

откуда C = x0; следовательно, искомым решением (движением) будет

x = ∫ (t) dt + x0. (1.10)

Формула (1.10) дает искомый закон движения материальной точки. Других движений, определяемых дифференциальным уравнением (1.7) и условием (1.9), нет.
Условие (1.9) называется начальным условием, а числа t0 и x0 — начальными данными решения (движения).
Что нужно знать и уметь, для того чтобы научиться решать дифференциальные уравнения? Для успешного изучения «диффуров» вы должны хорошо уметь интегрировать и дифференцировать. Чем качественнее изучены темы «Производная функции одной переменной и Неопределенный интеграл», тем будет легче разобраться в дифференциальных уравнениях.

Дифференциальное уравнение — уравнение, связывающее значение производной функции с самой функцией, значениями независимой переменной, числами (параметрами). Порядок входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем не ограничен). Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или все, кроме хотя бы одной производной, отсутствовать вовсе.
Уравнение вида F(x, y(x), y'(x), …, y(n)(x)) = 0, где x — независимая действительная переменная, y(x) — искомая функция, называется обыкновенным дифференциальным уравнением.
Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок, входящих в него производных.
Не любое уравнение, содержащее производные неизвестной функции, является дифференциальным уравнением.
Например, $f'(x) = f(f(x))$ не является дифференциальным уравнением.

Общее и частное решение дифференциального уравнения.

Уравнение вида F (x, y (x), y ' (x), …, y (n)(x)) = 0, где x — независимая действительная переменная, y (x) — искомая функция, называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция y = φ (x), которая при подстановке в уравнение обращает его в верное равенство.
График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения.
Не всегда удается получать решения в явном виде, например
x2 + y2 = C.
Решение дифференциального уравнения, полученное в неявном виде F (x, y) = 0, называется интегралом дифференциального уравнения.
Общим решением дифференциального уравнения называется такое его решение, содержащее произвольные постоянные, из которого любое частное решение может быть получено при соответствующем подборе произвольных постоянных.
Частное решение дифференциального уравнения — это решение, не содержащее произвольных постоянных.

Аналогично определяются общий интеграл и частный интеграл дифференциального уравнения.
Если уравнение не интегрируется в элементарных функциях, но все его решения выражаются через неопределенные интегралы от элементарных функций, то говорят, что уравнение проинтегрировано в квадратурах. Квадратурой называется операция взятия неопределенного интеграла.
Например, все решения уравнения

$$y' = \sin x/x$$

даются формулой

$$y = \int \sin x/x \, dx + C.$$

Задача Коши.
Дифференциальное уравнение обычно имеет бесчисленное множество решений. Для того, чтобы из всех решений выделить одно, надо задать какое-либо конкретное значение функции при некотором значении независимого переменного. Задать значение y_0 искомой функции при некотором значении x_0 независимого переменного — это значит задать начальное условие
С геометрической точки зрения задача отыскания решения дифференциального уравнения с заданным начальным условием равносильна тому, чтобы найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку M_0 (x_0, y_0) на плоскости XOY.
Естественно возникает вопрос: всегда ли существует решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, и, если существует, то будет ли оно единственным?
Ответ на поставленные вопросы дает теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
Теорема
Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $= y_0$, и относительно функции $f(x, y)$ выполнены следующие условия:
В прямоугольнике R, определенном неравенствами

$$x_0 - a \le x \le x_0 + a,$$
$$y_0 - b \le y \le y_0 + b,$$

функция $f(x, y)$ непрерывна. Из этого условия вытекает, что в замкнутой области R функция $f(x, y)$ ограничена, т.е. существует действительное число $M > 0$ такое, что для любой точки $(x, y) \in R$ $|f(x, y)| \le M$.
В области R функция $f(x, y)$ относительно аргумента y удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует такое действительное число $A > 0$, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le A|y_1 - y_2|$.
Обозначим через h меньшее из двух чисел a, .
При данных условиях существует единственное решение $y = y(x)$, где $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, удовлетворяющее начальному условию $= y_0$.
Основные методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференциальные уравнения первого порядка

I. Уравнения с разделяющимися переменными.
II. Уравнения, однородные относительно переменных
III. Уравнения в полных дифференциалах
IV. Линейные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными..

Дифференциальные уравнения f(y)dy =f(x)dx называют уравнениями с разделяющимися переменными.
Название этого вида дифференциальных уравнений достаточно показательно: выражения, содержащие переменные *x* и *y*, разделены знаком равенства, то есть, находятся по разные стороны от него.
Будем считать, что функции *f(y)*и *g(x)* непрерывны.
Общим интегралом уравнения с разделенными переменными является равенство $\int f(y)dy = \int g(x)dx$. Если интегралы из этого равенства выражаются в элементарных функциях, то мы можем получить общее решение дифференциального уравнения как неявно заданную функцию *Φ(x, y) = 0*, а иногда получается выразить функцию *y* в явном виде.
Напомним, что y' = dy/dx
В дифференциальных уравнениях $f_1(y)\cdot g_1(x)\cdot y' = f_2(y)\cdot g_2(x)$ переменные могут быть разделены, проведением преобразований. Такие ОДУ называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Соответствующее ДУ с разделяющимися переменными запишется как

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)}dy = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}dx$$

При разделении переменных следует быть очень внимательными, чтобы проводимые преобразования были эквивалентными (чтобы $f_2(y)$ и $g_1(x)$ не обращались в ноль на интервале интегрирования). В противном случае можно потерять некоторые решения.
Уравнения с разделяющимися переменными - **y' = f (x) g (y)**
1. y' = dy/dx.
2. Разделить переменные.
3. Проинтегрировать

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Сначала вспомним обычные алгебраические уравнения. Они содержат переменные и числа. Простейший пример: . Что значит решить обычное уравнение? Это значит, найти множество чисел, которые удовлетворяют данному уравнению. Легко заметить, что «детское» уравнение имеет единственный корень.
«Диффуры» устроены примерно так же!
Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае содержит:
1) независимую переменную;
2) зависимую переменную (функцию);
3) первую производную функции.
В некоторых уравнениях 1-го порядка может отсутствовать «икс» или (и) «игрек», но это не существенно – важно чтобы в ДУ была первая производная , и не было производных высших порядков – , и т.д.
Что значит решить дифференциальное уравнение? Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти множество всех функций, которые удовлетворяют данному уравнению.
Дифференциальное уравнение вида y′+a(x)y=f(x), где a(x) и f(x) − непрерывные функции, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.
y' + P(x) y = 0 — **линейное однородное дифференциальное уравнение** с разделяющимися переменными.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение $y' + P(x)\, y = 0$. Это и уравнение с разделяющимися переменными, значит,

$$dy/dx = – P(x)\, y$$

или

$$dy/y = – P(x)\, dx.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\ln y = \ln C – \int P(x)\, dx.$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.

В теории и практике различают два типа таких уравнений – однородное уравнение и неоднородное уравнение.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами - уравнение вида $y''+py'+qy=0$, где p,q − постоянные коэффициенты. Для каждого такого дифференциального уравнения можно записать так называемое характеристическое уравнение:$\lambda 2 + p\lambda + q = 0$

Это уравнение называется характеристическим уравнением, а его корни — характеристическими числами уравнения $y''+py'+qy=0$

Заметим, что характеристическое уравнение может быть составлено по данному дифференциальному уравнению заменой y'', y' и y на $\lambda 2$, λ и 1, т. е. степень λ совпадает с порядком производной, если условиться считать, что производная нулевого порядка от функции есть сама функция $y(0) \equiv y$.

Структура фундаментальной системы решений, а вместе с ней и общего решения уравнения зависит от вида корней характеристического уравнения.