Занятие №9,10

(два занятия)

Уважаемые курсанты, на 1 курсе у нас изучалась тема **Интегралы**, на 2 курсе эта тема изучается глубже, задания сложнее. В предыдущем занятии представлена теория по теме **Неопределенный интеграл.** Сделайте конспект или воспользуйтесь конспектом 1 курса для ответов на вопросы (отвечать на вопросы устно), присылать конспект не нужно, наличие всех работ проверю при очном обучении.

Первообразная. Неопределенный интеграл. Способы вычисления неопределенного интеграла.

Первообразная. Неопределённый интеграл.

Первообразная. Непрерывная функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для каждого $x \in X$
$F'(x)=f(x)$.

Неопределённый интеграл функции $f(x)$ на промежутке X есть *множество всех её первообразных*. Это записывается в виде:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

Где C–любая постоянная, называемая *постоянной интегрирования*.

Некоторые неопределённые интегралы от элементарных функций

$$\int dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$$

Основные свойства неопределённого интеграла

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную на промежутке X, и k– число, то

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Короче: *постоянную можно выносить за знак интеграла.*

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные на промежуткеX, то

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Короче: *интеграл суммы равен сумме интегралов.*

Методы интегрирования (Способы вычисления неопределенного интеграла.)

Интегрирование подстановкой (замена переменной). Если функция $f(z)$ определена и имеет первообразную при $z\in \boldsymbol{Z}$, а функция $z=g(x)$имеет непрерывную производную при $x \in \boldsymbol{X}$ и её область значений $g(\boldsymbol{X})\subset \boldsymbol{Z}$, то функция $F(x)=f[g(x)]\,g'(x)$ имеет первообразную на X и

$$\int F(x)dx=\int f[g(x)]\bullet g'(x)dx=\int f(z)dz.$$

П р и м е р. Найти интеграл: $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Р е ш е н и е. Чтобы избавиться от квадратного корня, положим $\sqrt{x-3}=u$,тогда $x = u^2+$ 3и,следовательно, $dx = 2u\,du$. Делая подстановку, имеем:

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int (u^2+3)\,u\,2u\,du=\int (2u^4+6u^2)\,du=2u^5/5+2u^3=$$

$$=\frac{2(x-3)^{5/2}}{5}+2(x-3)^{3/2}+C.$$

Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные первые производные и существует интеграл $\int v(x)du(x)$,то существует и интеграл $\int u(x)dv(x)$и имеет место равенство:

$$\int u(x)dv(x)=u(x)\bullet v(x)-\int v(x)du(x)$$

или в более короткой форме:

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du.$$

Обратите внимание, что интегрирование по частям и дифференциал произведения являются взаимно обратными операциями (проверьте!).

П р и м е р . Найти интеграл:, $\int \ln x\,dx$.

Р е ш е н и е. Предположим $u=\ln x$ и $dv=dx$, тогда $du=dx/x$ и $v=x$. Используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x-\int x\,dx/x = x\ln x-x+C.$$

Вопросы по теме:

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Запишите символами связь первообразной $F(x)$ с функцией $f(x)$.
3. Объясните понимание фразы: «Дифференцирование и интегрирование – взаимно обратные действия».
4. Дайте определение неопределенного интеграла.
5. Прокомментируйте общепринятую символику: $S-?;\ f(x)-?;\ f(x)dx-?;x-?$.
6. Сформулируйте правило проверки действия отыскания интеграла.
7. Сформулируйте свойства неопределенного интеграла.
8. Запишите формулу, лежащую в основе метода интегрирования «по частям».
9. Объясните идею метода интегрирования «по частям».
10. Составьте алгоритм метода интегрирования «по частям».
11. Объясните идею, понимание метода замены переменной, который применяется в математике.
12. Перечислите правила интегрирования (свойства неопределенного интеграла).
13. Вспомните общепринятое оформление примеров на отыскание интегралов методом подстановки (замены переменной).