Занятия 49-50

Неравенства. Рациональные, иррациональные, показательные и тригонометрические неравенства. Основные приемы их решения. Основные приемы решения уравнений. Решение систем уравнений. Использование свойств и графиков функций для решения уравнений и неравенств.

Цель. Уметь решать неравенства, применяя основные приемы решения. Уметь решать уравнения и системы уравнений.

Линейные неравенства мы уже решали. Рассмотрим более сложные неравенства.

Рациональные неравенства.

1. $(x-2)(2x+3)(x^2-1)<0$

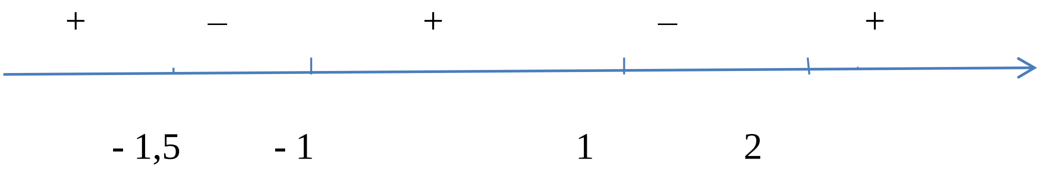
Решим неравенство методом интервалов (РНМИ).

Найдем точки, в которых произведение обращается в 0.

$x-2=0$ $\quad$ $2x+3=0$ $\quad$ $x^2-1=0$

$x=2$ $\quad$ $x=-\frac{3}{2}$ $\quad$ $x=\pm 1$

Покажем их на числовой прямой. Этими точками числовая прямая разбилась на пять интервалов. Определим знак заданного выражения на каждом интервале, подставляя число из интервала в выражение.



Учитывая, что знак сравнения в заданном примере $<$, выбираем интервалы со знаком «минус» и записываем решение: $x\in(-1{,}5;\,-1),(1;2)$. Скобки везде круглые, так как неравенство строгое.

2. $\frac{x+1}{x-1}+2x\geq\frac{2}{x-1}$.

Приведем к общему знаменателю и перенесем все слагаемые в левую часть.

$$\frac{2x^2-x-1}{x-1}\geq 0$$

Разложим на множители числитель: $2x^2-x-1=2(x-1)(x+\frac{1}{2})$.

$$\frac{2(x-1)(x+\frac{1}{2}).}{x-1}\geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов (РНМИ).

На числовой прямой покажем точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в ноль.

$-\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ 1

Точка $-\frac{1}{2}$ закрашена, так как числитель может равняться нулю, а точка 1 выколота, так как в знаменателе нуля не может быть. Этими точками числовая прямая разбита на три интервала. Подставим в дробь значения x из каждого интервала и определим знак выражения на данном интервале.

Получим следующее чередование знаков: (-), (+), (+).

Решением нашего неравенства будет: $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right), (1; +\infty)$.

Хочу вас предостеречь от сокращения – ведь у нас получились одинаковые скобки в числителе и в знаменателе, и хочется их сократить. Но сократив, мы можем пропустить момент, что $x \neq 1$.

3.

$$\frac{(x-4)^3(x-6)^4(x+6)}{(x+7,5)} < 0$$

РНМИ.

Определим точки, в которых числитель и знаменатель равны 0. Получаем интервалы.

Можно определять знак на каждом интервале, подставляя число из интервала, а можно воспользоваться правилами определения знаков на интервалах.

1) Если в скобках перед иксами везде знак + (или просто его нет), то знак на первом интервале справа будет +, а дальше будет чередование знаков, если не будет ситуации, описанной в п2).
2) Если скобка повторяется четное количество раз, то при переходе через число, обращающее эту скобку в ноль (у нас 6) смены знака не будет.
3) Добавим сюда еще одно правило. Точки, которые пришли из знаменателя, всегда выколотые (не закрашенные), так как знаменатель не должен равняться

нулю. Точки, пришедшие из числителя не закрашенные, если знак сравнения $<$ или $>$, и закрашенные, если знак сравнения $\le$ или $\ge$.

Выбираем нужные интервалы:
x$\in (-\infty; 7{,}5), (-6; 4)$.

4. $\frac{(x-4)^3(x-6)^4(x+6)}{(x+7{,}5)} \le 0$

Изменился только знак сравнения, неравенство стало нестрогим. Это значит, что все точки, пришедшие из числителя, будут закрашенными, а скобки около этих точек квадратными.

x$\in (-\infty; 7{,}5]\,, [-6; 4]$. Но это неполное решение. Точка x=6 тоже будет закрашенной. Часто допускают ошибку, не взяв эту точку, так как она находится в положительных интервалах, а нам нужно меньше или равно 0. Вот именно потому, что «или равно 0», точка x=6 тоже входит в решение неравенства.

Окончательный ответ: x$\in (-\infty; 7{,}5]\,, [-6; 4], \{6\}$.

В фигурных скобках записывают множества, состоящие их отдельных чисел.

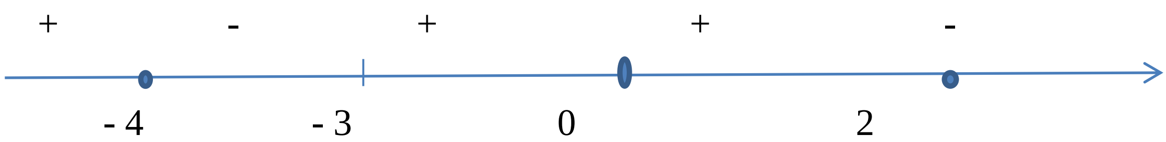
5. Давайте еще немного изменим предыдущее неравенство.

$$\frac{(x-4)^3(x-6)^4(x+6)(x-7)^2}{(x+7{,}5)} \le 0$$

Добавилась два раза повторяющаяся скобка, значит, при переходе через 7 знак не будет меняться. Но при x=7 выражение =0, значит, 7 будет входить в решение.
x$\in (-\infty; 7{,}5]\,, [-6; 4], \{6{,}7\}$.
Обратите внимание: первые два – это интервалы, а последняя скобка – это только два числа – 6 и 7, а не от 6 до 7!!!!!

6. $\frac{(x+4)(2-x)x^2}{(3+x)} \ge 0$

РНМИ
Определяем точки на числовой прямой: - 4, - 3, 0, 2. Все точки, кроме x= - 3, будут закрашены.
Что еще мы должны увидеть? То, что в одной из скобок (2 – x) перед иксом стоит минус. Такая скобка только одна. Значит, первый знак справа будет «минус» (если бы было две скобки с минусом перед иксом, то первый знак был бы +, если три – то первый правый знак был бы минус и т.д.). Множитель x у нас в четной степени, значит, при переходе через ноль знак не будет меняться.



Напоминаю, что у закрашенных точках квадратная скобка, у не закрашенных – круглая.

Интервалы слева и справа от нуля мы можем объединить, так как 0 тоже входит в решение. Если бы неравенство было строгое, пришлось бы писать каждый интервал отдельно и около 0 ставить круглую скобку.

Ответ: $x \in (-\infty; 4], (-3; 2]$.

Следующие примеры решаем на занятии и дома.

1. $(2+4x)(x-2)(x-3)^2>0$
2. $(2-4x)(x+2)(x-3)>0$
3. $\frac{(3x+9)(2-x)x}{(x+3)x} \leq 0$

Смотрите ниже.

20 В чем заключается метод интервалов

Некоторые итоги

Для того, чтобы использовать метод интервалов для решения неравенств, необходимо:

1. Разложить $f(x)$ на множители;
2. Определить вид разложения функции:
   а) если вид канонический, то распределение знаков функции начинается всегда справа сверху, и знаки чередуются;
   б) если вид неканонический, то распределение знаков функции начинается всегда справа снизу, и знаки чередуются, проходя корни функции;
3. Уточнить кратность корней: если есть корни четной кратности, то, проходя через них, функция дважды меняет свой знак на противоположный; если есть корни нечетной кратности, то, проходя через них, функция меняет свой знак на противоположный;
4. Обратить внимание на то, какое дано неравенство, строгое или нет, так как в зависимости от этого на оси абсцисс нужно отметить или незаштрихованные (полые) точки, или заштрихованные точки;
5. Для дробных неравенств не забыть отметить на оси абсцисс корни знаменателя как полые точки;
6. Для нестрогого дробного неравенства при наличии корней в разложении и в числителе, и в знаменателе на оси абсцисс отметить полые точки корней знаменателя и заштрихованные точки корней числителя.
7. Если требуется выяснить, при каких значениях x функция или выражение принимает положительные или неотрицательные значения, то заштриховывается (рассматривается) верхняя полуплоскость, иначе — нижняя полуплоскость.

Тренировочная работа 1 21

Тренировочная работа 1

Решите неравенства 1–10:

1. $\frac{x+4}{(x+5)x} < 0.$
2. $\frac{4-3x}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0.$
3. $\frac{25-16x^2}{x^2+4x+4} > 0.$
4. $\frac{x^2+3x}{49x^2+70x+25} \leqslant 0.$
5. $\frac{4x+3}{x+2} > 5.$
6. $\frac{6x-1}{4x+3} \leqslant \frac{3x-2}{2x-1}.$
7. $\frac{5}{-6x+3} + \frac{6x}{1-2x} \geqslant 0.$
8. $\frac{x^2+7x+8}{(x+1)^2-9} - \frac{3x+7}{3x-6} \leqslant 0.$
9. $\frac{6}{-4x-x^2} - \frac{2}{x^2-4x} + \frac{x}{x^2-16} \geqslant 0.$
10. $\left(\frac{x^2+2x+4}{4x^2-1} \cdot \frac{2x^2-x}{-x^3+8} - \frac{2-x}{2x^2+x}\right) : \frac{4}{x^2-2x} \geqslant \frac{4-x}{x+2x^2}.$

Иррациональные неравенства.

Как и при решении иррациональных уравнений в неравенствах надо учитывать, что значение подкоренного выражения и значение самого корня есть число неотрицательное.

Решение начинаем с нахождения области допустимых значений (ОДЗ). Может оказаться так, что условия ОДЗ несовместны. Тогда дальнейшее решение не имеет смысла.

1. $\sqrt{2x+5} > \sqrt{x+3}$

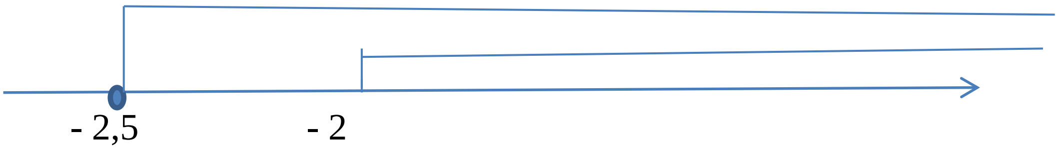
ОДЗ:

$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2{,}5 \\ x \geq -3 \end{cases} \leftrightarrow x \geq -2{,}5.$

Так как обе части неравенства неотрицательные, можно их возвести в квадрат.

$2x + 5 > x + 3,\; x > -2.$

Объединяем решение с условием ОДЗ на числовой прямой:



Ответ: $x > -2$ или $x \in (-2;\ +\infty)$.

2. Может ли неравенство иметь решением не интервал, а конкретное число?

Рассмотрим следующее неравенство:

$\sqrt{2x+5} \geq x+3$. ОДЗ: $x \geq -2{,}5$.

Нужно рассмотреть два случая: $x+3 \leq 0$ и $x+3 > 0$

Так как правая часть положительна или ноль, то она $\geq$ неположительной правой части при любом x из ОДЗ. Система

$\begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x \geq -2{,}5 \end{cases}$ несовместна. Значит, при $x+3 \leq 0$ решений нет.

Если правая часть положительна, то мы можем возвести обе части в квадрат. Получим $x^2 + 4x + 4 \leq 0,\; (x+2)^2 \leq 0$. Квадрат числа меньше нуля быть не может, но может быть равен нулю. И это будет при x= - 2. Сверяем с ОДЗ. x= - 2 $\in$ ОДЗ

Ответ: x= -2.

Показательные неравенства.

Вы помните, что при решении показательных уравнений нам надо было привести его к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. И дальше мы приравнивали показатели и решали получившееся уравнение.

При решении неравенств надо обращать внимание на то, больше или меньше единицы основание.

Правило. Если $a > 1$, то при отбрасывании оснований знак сравнения сохраняется, если $0 < a < 1$, то знак сравнение меняется на противоположный.

Это касается и логарифмических неравенств.

Рассмотрим несколько более сложных неравенств.

1. $\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 4) < \log_{\frac{1}{4}} 3x$ Ответ: $x > 4$.

2. x+1- $3\sqrt{x+1}$ - 4> 0. ОДЗ: $x > -1$.

Обозначим $\sqrt{x+1} = t, t \geq 0$. Объясните, почему?

$t^2 - 3t - 4 > 0$. Решив это неравенство, получим t> 4. Вернемся к исходной переменной x.

$\sqrt{x+1} > 4$. Обе части положительны, можно возвести в квадрат.

$x + 1 > 16,\ x > 15 \in$ ОДЗ.

3. $3^x + 4 < 3^{2x+1}$

$3^x + 4 < 3^{2x} \cdot 3$, $3^x = t, t > 0$, $3t^2 - t - 4 > 0$, $t < -1$ и $t > \frac{4}{3}$.

$3^x > \frac{4}{3}$. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 3> 1.

$\log_3 3^x > \log_3 \frac{4}{3}$,

x$> \log_3 4 - 1$.

Решите систему неравенств:

6. а) $\begin{cases} x^3 < x, \\ 3x^2 - x > 5 - 15x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x-7} < 1, \\ \dfrac{3x+4}{4x-2} > -1. \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{24}{(x+2)^2} < 0, \\ -3x < 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 1{,}5x - 7}{(x-4)^2} > 0, \\ x^2 < 25. \end{cases}$

Решите совокупность неравенств:

8. а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 > 0, \\ x - 6 < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x(x+1) \leqslant 0, \\ 3x - 9 > 0. \end{array}\right.$

9. а) $\left[\begin{array}{l} (x+3)^3 \geqslant 27, \\ 4x - 1 < 12x; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} (x+3)(x^2 - 3x + 9) < 54, \\ x^2 - 9 > 0. \end{array}\right.$

Смотреть дальше.

Решить уравнения методом введения новой переменной.

.17. а) $\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-1}}+4\sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+3}}=4;$ б) $\sqrt{\dfrac{5x-1}{x+3}}+5\sqrt{\dfrac{x+3}{5x-1}}=6.$

.18. а) $2^x + 2^{1-x} = 3;$ в) $5^x + 4 = 5^{2x+1};$

б) $25^{-x} - 50 = 5^{-x+1};$ г) $3^{x+1} - 29 = -18 \cdot 3^{-x}.$

.19. а) $7^{2x+1} - 50 \cdot 7^x = -7;$ в) $4\sin^2 x + 4 = 17\sin x;$

б) $\log_2^2 x + 12 = 7\log_2 x;$ г) $\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 2 = 0.$

.20. а) $\lg^2 x^2 + \lg 10x - 6 = 0;$

б) $3^x + 3^{-x+1} = 4;$

в) $2\cos^2 x - 7\cos x - 4 = 0;$

г) $5^{2\sqrt{x}} + 125 = 6 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}.$