Занятие 56

Последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей. *Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.* Суммирование последовательностей. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

Цель. Знать понятие последовательности, способы ее задания и свойства.

Определение 1. Функцию y=f(x) при $x \in N$, называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают y=f(n) или y_1, y_2, y_n … или (y_n).

Способы задания последовательностей.

Словесно, когда правило задания последовательности описано словами. Например, последовательность простых чисел: 2,3,5,7,11,13,17,19,…..

Аналитически. В этом случае указана формула n-го члена.

Например, 1,4,9,16,25,36,49,64,….., n^2

Нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером.

$y_{14}=14^2=196$.

Еще пример. $y_n=2^n$. Вот несколько членов последовательности: 2,4,8,16,32,64…..

y_n=C. C – это постоянное число. Такая последовательность называется стационарной.

Рекуррентно. В последовательности, заданной рекуррентно, каждый следующий член последовательности определяется при помощи определенного правила и значения предыдущего члена последовательности. Известные нам арифметическая и геометрическая прогрессии – последовательности, заданные рекуррентно.

Вспомним прогрессии и правило их задания, опираясь на примеры.

1,2,4,8,16,32,64….. – геометрическая прогрессия.

2,5,8,11,14,17,……. – арифметическая прогрессия.

1,1,2,3,5,8,13,21,44,65,111,176,……..это числа Фибоначчи.

Попробуйте определить правило, по которому можно находить члены последовательности, начиная с третьего.

<u>Определение 2.</u> Последовательность называется ограниченной снизу, если все ее члены не меньше некоторого числа. Например, последовательность 1,2,3,4,5,:,7…. n ограничена снизу, так как все ее члены не меньше 1.

<u>Определение 3.</u> Последовательность называется ограниченной сверху, если все ее члены не больше некоторого числа.

Например, последовательность -1, -4, -9, -16, -25….. $-n^2$ ограничена сверху, все ее члены не больше -1. Можно взять число 0. Все члены этой последовательности не больше 0.

Если последовательность ограничена и снизу и сверху, то ее называют ограниченной последовательностью.

изобразив члены последовательности $y_n = \frac{1}{n}$ точками на числовой прямой, замечаем, что все они принадлежат отрезку [0; 1] (рис. 112). Значит, $y_n = \frac{1}{n}$ — ограниченная последовательность.

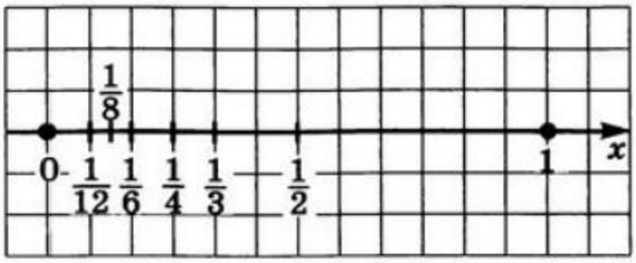

Рис. 112

<u>Определение 4.</u> Последовательность называется возрастающей, если каждый ее член больше предыдущего, например: 2,4,6,8,……

<u>Определение 5.</u> Последовательность называется убывающей, если каждый ее член меньше предыдущего, например: -2,-4,-6,-8,……

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – монотонные последовательности.

Приведем еще несколько примеров.

1) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n-1}, \frac{1}{n}, \ldots$. Эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей (немонотонная последовательность).

2) $y_n = 2^n$. Речь идет о последовательности 2, 4, 8, 16, 32, … . Это возрастающая последовательность.

Вообще *если $a > 1$, то последовательность $y_n = a^n$ возрастает.*

3) $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Речь идет о последовательности $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$. Это убывающая последовательность.

Вообще *если $0 < a < 1$, то последовательность $y_n = a^n$ убывает.*

Определение 6. Число b называется пределом последовательности, если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Обозначается: $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Читается: предел последовательности y_n при стремлении n к бесконечности равен b.

На рис.112 показана последовательность, предел которой равен 0. Такая последовательность называется сходящейся, все ее члены как бы «сгущаются» около точки 0.

Для рассмотренной выше последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ можно записать соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.}$$

Так же обстоит дело с последовательностью

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots .$$

Имеет место соотношение $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$

Последовательность 1,2,3,4,5,6,7….. расходящаяся, так как у нее нет «точки сгущения». Соответственно и предела у этой последовательности нет.

Вообще

$$\boxed{\text{если } |q| < 1, \text{ то } \lim_{n \to \infty} q^n = 0.}$$

А что будет с последовательностью q^n, если $|q| > 1$? Пусть, например, $q = 2$, т. е. речь идет о последовательности 2, 2^2, 2^3, 2^4, ... , 2^n, ... Эта последовательность явно не имеет предела (нет «точки сгущения»). Вообще справедливо утверждение:

если $|q| > 1$, то последовательность $y_n = q^n$ расходится.

Сходящиеся последовательности обладают некоторыми свойствами.

Свойство 1. *Если последовательность сходится, то только к одному пределу.*

Свойство 2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Заметим, что обратное утверждение неверно: например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... , 1, 2, 3, ... — ограниченная последовательность, но она не сходится.

Оказывается, если последовательность не только ограничена, но и монотонна (убывает или возрастает), то она обязательно сходится; это доказал в XIX в. немецкий математик Карл Вейерштрасс.

Свойство 3. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится* (теорема Вейерштрасса).

Теорема. **Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = c$, то**

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}, \ c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \to \infty} (kx_n) = kb.$$

Пример. Найти пределы последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; в) $t_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{5}{n^2} + 3$;

б) $z_n = \dfrac{k}{n^4}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3}{n^2+4}$.

Решение. а) Имеем: $\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

б) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(k \cdot \frac{1}{n^4}\right) = k \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$$
$$= k \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Вообще для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{n^m}\right) = 0.}$$

в) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2} + \dfrac{4}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2 + \dfrac{3}{n^2}}{1 + \dfrac{4}{n^2}}.$$

Теперь можно воспользоваться правилом «предел дроби (частного)». Предел числителя равен 2, предел знаменателя равен 1, предел дроби равен 2.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 3; г) 2.

Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots .$$

т. е. последовательность (b_n), каждый член которой получается из предыдущего умножением на одно и то же отличное от нуля число q (знаменатель прогрессии).

Будем последовательно вычислять суммы двух, трех, четырех и т. д. членов прогрессии:

$$S_1 = b_1;$$
$$S_2 = b_1 + b_2;$$
$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3;$$
$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4;$$
$$\cdots$$
$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n;$$
$$\cdots$$

Получилась последовательность $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$. Как всякая числовая последовательность, она может сходиться или расходиться. Если последовательность S_n сходится к пределу S, то число S называют *суммой геометрической прогрессии* (обратите внимание: не суммой n членов геометрической прогрессии, как мы говорили в 9-м классе, а суммой геометрической прогрессии). Если же эта последовательность расходится, то о сумме геометрической прогрессии не говорят, хотя о сумме первых n членов геометрической прогрессии можно, разумеется, говорить и в этом случае.

Напомним формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии: если $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$, то $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Рассмотрим случай, когда знаменатель q геометрической прогрессии удовлетворяет неравенству $|q| < 1$. Докажем, что в этом случае $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{b_1}{1 - q}$.

Прежде всего воспользуемся тем, что постоянный множитель $\frac{b_1}{q-1}$ можно вынести за знак предела. Получим:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1}{q-1}(q^n-1) = \frac{b_1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty}(q^n-1).$$

Далее воспользуемся тем, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (при $|q|<1$), и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(q^n-1) = 0-1 = -1$. Тогда

$$\frac{b_1}{q-1} \cdot \lim_{n\to\infty}(q^n-1) = \frac{b_1}{q-1}\cdot(-1) = \frac{b_1}{1-q}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, по определению, является суммой геометрической прогрессии. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Если знаменатель q геометрической прогрессии (b_n) удовлетворяет неравенству $|q|<1$, то сумма S прогрессии вычисляется по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 1. Найти сумму геометрической прогрессии

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \dots .$$

Решение. Здесь $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{2}$. Поскольку знаменатель прогрессии удовлетворяет неравенству $|q|<1$, мы имеем право воспользоваться только что полученной формулой $S = \frac{b_1}{1-q}$. Значит, $S = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$. Обратите внимание, что нам удалось найти сумму бесконечного множества слагаемых:

$$4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots = 8.$$

Ответ: $S = 8$.

ДЗ.

Выразить из формулы $S = \frac{b_1}{1-q}$ b_1 и q.

Выразить из формулы $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ b_1 и q

Найти n-й член геометрической прогрессии, если S= 30, b_1= 20, n=3.

Пояснения.

Из формулы $S = \frac{b_1}{1-q}$ найти q.

По формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$