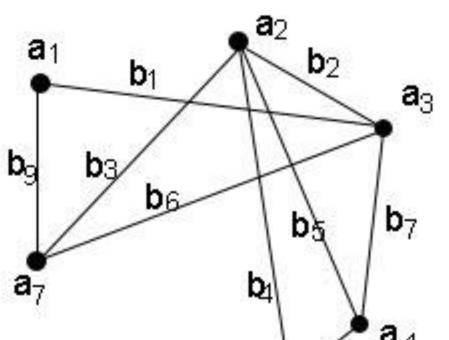
Занятие 17

Тема. Графы. Основные определения. Элементы и ряды графов

Теория графов - один из обширнейших разделов дискретной математики, широко применяется в решении экономических и управленческих задач, в программировании, химии, конструировании и изучении электрических цепей, коммуникации, психологии, психологии, социологии, лингвистике, других областях знаний. **Теория графов** систематически и последовательно изучает свойства графов, о которых можно сказать, что они состоят из множеств точек и множеств линий, отображающих связи между этими точками. Основателем теории графов считается Леонард Эйлер (1707-1882), решивший в 1736 году известную в то время задачу о кёнигсбергских мостах.

Графы строят для того, чтобы отобразить отношения на множествах. Пусть, например, множество $A = \{a1, a2, \ldots an\}$ - множество людей, а каждый элемент будет отображён в виде точки. Множество $B = \{b1, b2, \ldots bm\}$ - множество связок (прямых, дуг, отрезков - пока не важно). На множестве A задано отношение знакомства между людьми из этого множества. **Строим граф** из точек и связок. Связки будут связывать пары людей, знакомых между собой. Естественно, число знакомых у одних людей может отличаться от числа знакомых у других людей, а некоторые вполне могут и не быть ни с кем знакомы (такие элементы будут точками, не соединёнными ни с одной другой). Вот и получился граф!



То, что мы сначала назвали "точками", следует называть вершинами графа, а то, что называли "связками" - рёбрами графа.

Теория графов не учитывает конкретную природу множеств A и B. Существует большое количество самых разных конкретных задач, при решении которых можно временно забыть о специфическом содержании множеств и их элементов. Эта специфика никак не сказывается на ходе решения задачи, независимо от её трудности! Например, при решении вопроса о том, можно ли из точки *a* добраться до точки *e*, двигаясь только по соединяющим точки линиям, неважно, имеем ли мы дело с людьми, городами, числами и т.д. Но, когда задача решена, мы получаем решение, верное для любого содержания, которое было смоделировано в виде графа. Не удивительно поэтому, что теория графов - один из самых востребованных инструментов при создании искусственного интеллекта: ведь искусственный интеллект может обсудить с собеседником и вопросы любви, и вопросы музыки или спорта, и вопросы решения различных задач, причем делает это без всякого перехода (переключения), без которого в подобных случаях не обойтись человеку.

А теперь строгие математические определения графа.

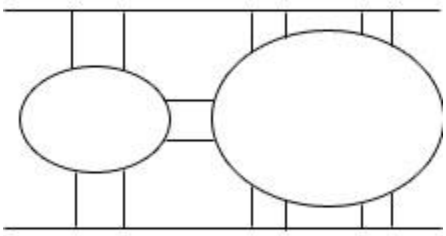
Определение 1. Графом называется система объектов произвольной природы (вершин) и связок (рёбер), соединяющих некоторые пары этих объектов.

Определение 2. Пусть V – (непустое) множество вершин, элементы $v \in V$ – вершины. Граф $G = G(V)$ с множеством вершин V есть некоторое семейство пар вида: $e = (a, b)$, где $a, b \in V$, указывающих, какие вершины остаются соединёнными. Каждая пара $e = (a, b)$ - ребро графа. Множество U - множество рёбер e графа. Вершины a и b – концевые точки ребра e.

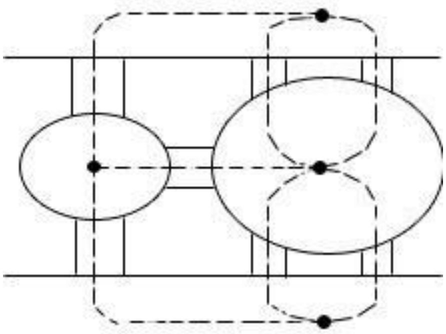
Слово граф греческого происхождения, от слов "пишу", "описываю". Из начала этой статьи известно, что именно описывает граф: описывает он отношения. То есть, любой граф описывает отношения. И наоборот: любое отношение можно описать в виде графа.

Классические задачи теории графов и их решения

Один из первых опубликованных примеров работ по теории графов и применения графов - работа о "задаче с Кёнигсбергскими мостами" (1736 г.), автором которой является выдающийся математик 18-го века Леонард Эйлер. В задаче даны река, острова, которые омываются этой рекой, и несколько мостов. Вопрос задачи: возможно ли, выйдя из некоторого пункта, пройти каждый мост только по одному разу и вернуться в начальный пункт? (рисунок ниже)



Задачу можно смоделировать следующим образом: к каждому участку суши прикрепляется одна точка, а две точки соединяются линией тогда и только тогда, когда соответствующие участки суши соединены мостом (рисунок ниже, соединительные линии начерчены пунктиром). Таким образом, построен граф.



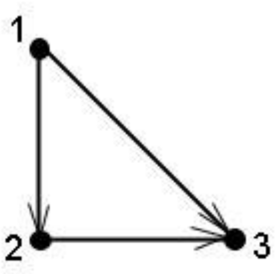
Ответ Эйлера на вопрос задачи состоит в следующем. Если бы у этой задачи было положительное решение, то в получившемся графе существовал бы замкнутый путь, проходящий по рёбрам и содержащий каждое ребро только один раз. Если существует такой путь, то у каждой вершины должно быть только чётное число рёбер. Но в получившемся графе есть вершины, у которых нечётное число рёбер. Поэтому задача не имеет положительного решения.

По устоявшейся традиции эйлеровым графом называется граф, в котором можно обойти все вершины и при этом пройти одно ребро только один раз. В нём каждая вершина должна иметь только чётное число рёбер. **Задачи с графами для закрепления основных понятий**

Пример 1. Пусть A - множество чисел 1, 2, 3: $A = \{1, 2, 3\}$. Построить граф для отображения отношения "<" ("меньше") на этом множестве.

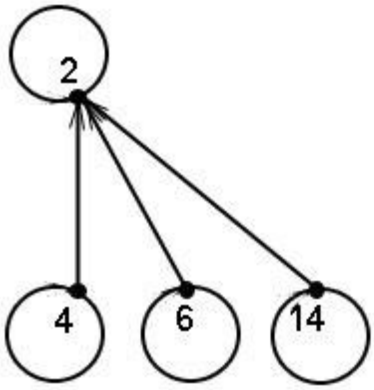
Решение. Очевидно, что числа 1, 2, 3 следует представить в виде вершин графа. Тогда каждую пару вершин должно соединять одно ребро. Решая эту задачу, мы пришли к таким основным понятиям теории графов, как **ориентированные и неориентированные графы**. Неориентированные графы - такие, рёбра которых не имели направления. Или, как говорят ещё чаще, порядок двух концов ребра не существенен. В самом деле, граф, построенный в самом начале этого урока и отображавший отношение знакомства между людьми, не нуждается в направлениях рёбер, так как можно утверждать, что "человек номер 1" знаком с "человеком номер 2" в той же мере, как и "человек номер 2" с "человеком номер 1". В нашем же нынешнем примере одно число меньше другого, но не наоборот. Поэтому соответствующее ребро графа должно иметь направление, показывающее, какое всё же число меньше другого. То есть, порядок концов ребра существенен. Такой граф (с рёбрами, имеющими направление) называется ориентированным графом или орграфом.

Итак, в нашем множестве A число 1 меньше числа 2 и числа 3, а число 2 меньше числа 3. Этот факт отображаем рёбрами, имеющими направление, что показывается стрелками. Получаем следующий граф:



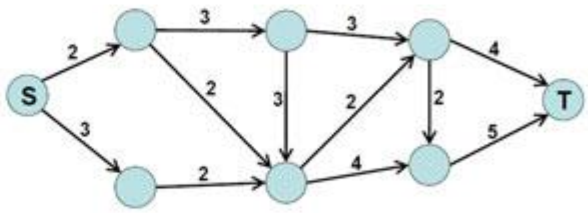
Пример 2. Пусть A - множество чисел 2, 4, 6, 14: $A = \{2, 4, 6, 14\}$. Постоить граф для отображения отношения "делится нацело на" на этом множестве.

Решение. В этом примере часть рёбер будут иметь направление, а некоторые не будут, то есть строим **смешанный граф**. Перечислим отношения на множестве: 4 делится нацело на 2, 6 делится нацело на 2, 14 делится нацело на 2, и ещё каждое число из этого множества делится нацело на само себя. Это отношение, то есть когда число делится нацело на само себя, будем отображать в виде рёбер, которые соединяют вершину саму с собой. Такие рёбра называются **петлями**. В данном случае нет необходимости давать направление петле. Таким образом, в нашем примере три обычных направленных ребра и четыре петли. Получаем следующий граф:



Графы и задача о потоках

Постановка задачи. Имеется система водопроводных труб, представленная графом на рисунке ниже.



Каждая дуга графа отображает трубу. Числа над дугами (весы) - пропускная способность труб. Узлы - места соединения труб. Вода течёт по трубам только в одном направлении. Узел S - источник воды, узел T - сток. Требуется максимизировать объём воды, протекающей от источника к стоку.

Для решения задачи о потоках можно воспользоваться методом Форда-Фулкерсона. Идея метода: поиск максимального потока производится по шагам. В начале работы алгоритма поток полагается равным нулю. На каждом последующем шаге значение потока увеличивается, для чего ищется дополняющий путь, по которому поступает дополнительный поток. Эти шаги повторяются до тех пор, пока существуют дополнительные пути. Задача успешно применяется в различных распределённых системах: система электоснабжения, коммуникационная сеть, система железных дорог и других.