Занятие 10

Тема. Числовые ряды. Необходимый признак сходимости числового ряда. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости рядов.

Основные определения и понятия.

Пусть мы имеем числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где $a_k \in R, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Приведем пример числовой последовательности: $6, 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{16}, \ldots$.

Числовой ряд – это сумма членов числовой последовательности вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

В качестве примера числового ряда можно привести сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем *q* = -*0.5*: $8 - 4 + 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-16) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

a_k называют **общим членом числового ряда** или *k–ым* членом ряда.

Для предыдущего примера общий член числового ряда имеет вид $(-16) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

Частичная сумма числового ряда – это сумма вида $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где *n* – некоторое натуральное число. S_n называют также *n-ой* частичной суммой числового ряда.

К примеру, четвертая частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (-16) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ есть $S_4 = 8 - 4 + 2 - 1 = 5$.

Частичные суммы $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ образуют бесконечную последовательность частичных сумм числового ряда.

Для нашего ряда *n –ая* частичная сумма находится по формуле суммы первых *n* членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = \frac{8 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16}{3} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$, то есть, будем иметь следующую последовательность частичных сумм: $8, 4, 6, 5, \ldots, \frac{16}{3} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right), \ldots$

.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **расходящимся.**

Суммой сходящегося числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется предел последовательности его частичных сумм, то есть, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = S$.

В нашем примере $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{16}{3}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{16}{3}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{16}{3}$, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-16)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ сходится, причем его сумма равна шестнадцати третьим: $\sum_{k=1}^{\infty}(-16)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{16}{3}$.

В качестве примера расходящегося ряда можно привести сумму геометрической прогрессии со знаменателем большем, чем единица: $1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}+\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}$. *n–ая* частичная сумма определяется выражением $S_n = \frac{a_1\cdot(1-q^n)}{1-q} = \frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1$, а предел частичных сумм бесконечен: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(2^n-1) = +\infty$.

Еще одним примером расходящегося числового ряда является сумма вида $\sum_{k=1}^{\infty} 5 = 5+5+\ldots$. В этом случае *n–ая* частичная сумма может быть вычислена как $S_n = 5n$. Предел частичных сумм бесконечен $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 5n = +\infty$.

Сумма вида $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ называется **гармоническим числовым рядом**.

Сумма вида $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots$, где s – некоторое действительное число, называется **обобщенно гармоническим числовым рядом**.

Приведенных определений достаточно для обоснования следующих очень часто используемых утверждений, рекомендую их запомнить.

1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ЯВЛЯЕТСЯ РАСХОДЯЩИМСЯ.
2. СУММА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ВИДА $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} b_1 q^{k-1}$ СО ЗНАМЕНАТЕЛЕМ q ЯВЛЯЕТСЯ СХОДЯЩИМСЯ ЧИСЛОВЫМ РЯДОМ, ЕСЛИ $|q| < 1$, И РАСХОДЯЩИМСЯ РЯДОМ ПРИ $|q| \geq 1$.
3. ОБОБЩЕННО ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ СХОДИТСЯ ПРИ $s > 1$ И РАСХОДИТСЯ ПРИ $s \leq 1$.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **знакоположительным**, если все его члены положительны, то есть, $a_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется **знакочередующимся**, если знаки его соседних членов различны. Знакочередующийся числовой ряд можно записать в виде $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k$, где $a_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется **знакопеременным**, если он содержит бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов.
Знакочередующийся числовой ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд из абсолютных величин его членов, то есть, сходится знакоположительный числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$.
К примеру, числовые ряды $6 - 3 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16}, \ldots$ и $6 + 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16}, \ldots$ абсолютно сходятся, так как сходится ряд $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16}, \ldots$, являющийся суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется **условно сходящимся**, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

В качестве примера условно сходящегося числового ряда можно привести ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, расходящийся, так как является гармоническим. В то же время, исходный ряд является сходящимся, что легко устанавливается с помощью признака Лейбница. Таким образом, числовой знакочередующийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ условно сходящийся.

Выпишите определения в тетрадь. Приводите примеры. Высылать не надо.