Занятие 12

Тема. Функциональные ряды. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Прочитайте и законспектируйте.

1.Что такое функциональный ряд?	Обычный **числовой ряд**, вспоминаем, состоит из чисел: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$ Все члены ряда $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ – это **ЧИСЛА**. Функциональный же ряд состоит из **ФУНКЦИЙ**. Выглядит это, например, так: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n}$. Как и числовой ряд, любой функциональный ряд можно расписать в развернутом виде: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{(n+1)\cdot 2^n} = \frac{\sin x}{2\cdot 2^1} + \frac{\sin x}{3\cdot 2^2} + \frac{\sin x}{4\cdot 2^3} + \frac{\sin x}{5\cdot 2^4} + \frac{\sin x}{6\cdot 2^5} + \ldots$
2.Что такое степенной ряд?	Членами степенного ряда являются целые положительные степени переменной x либо двучлена $(x-a)$ $(a = const)$, умноженные на числовые коэффициенты: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots$
3.Интервал сходимости степенного ряда Радиус сходимости степенного ряда	

Интервал сходимости степенного ряда

Для любого степенного ряда существует конечное неотрицательное число R - радиус сходимости - такое, что если $R > 0$, то при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится.

Интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости степенного ряда. Если $R = +\infty$, то интервал сходимости представляет собой всю числовую прямую. Если же $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь в точке x=0.

Сходимость степенного ряда

Пример 1 Найти область сходимости степенного ряда : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Найдем радиус сходимости по формуле: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

$$a_n = \frac{1}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Следовательно, ряд сходится при всех действительных значениях x.