

## Занятие 13

Тема.

1 час. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

2 час. Общие и частные решения. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Дифференциальные уравнения связывают между собой неизвестную функцию (или несколько таких функций) с её производными. С простейшими уравнениями такого типа мы уже фактически сталкивались. И решали дифференциальные уравнения. В какой же ситуации это происходило? Оказывается, когда мы с вами находили первообразную для некоторой функции, то мы и решали диф.уравнение.

Разберемся на примере. Мы знаем, что  $(x^2)' = 2x$ . Запишем это равенство в виде или  $y' = 2x$  (а можно и так  $y' - 2x = 0$ ). Мы теперь уже знаем, что производную записывают в виде  $\frac{dy}{dx} = 2x$ . Домножим обе части равенства на  $dx$ . Получим  $dy=2xdx$ . А теперь проинтегрируем обе части равенства.

$$\int dy = \int 2xdx.$$

$$y=x^2 + C$$

Находя первообразную для  $2x$ , мы решали дифференциальное уравнение.

Итак, одна из задач, которая приводит к диф.уравнению – это нахождение первообразной.

Вторая задача.

Пусть тело движется на плоскости и известен закон изменения его скорости  $v(t)=2t+3$ . Как восстановить закон изменения расстояния тела?

$$\begin{aligned} \text{Имеем } S'(t)=v(t)=2t+3 &\quad \rightarrow \frac{ds}{dt} = 2t + 3 \rightarrow ds=(2t+3)dt \quad \rightarrow \int ds = \int(2t + 3)dt \\ &\rightarrow S(t) = t^2 + 3t + C. \end{aligned}$$

Мы получили общее решение дифференциального уравнения. Чтобы получить частное решение, необходимо знать дополнительные условия, например, расстояние в момент времени  $t$ :  $S=20$  при  $t=3$ . Подставим эти данные в последнее уравнение.  $20=3^2+3 \cdot 3 + C \rightarrow C = 2$ .  $S(t) = t^2 + 3t + 2$ . Это частное решение.

Итак, теория.

Обыкновенным **дифференциальным** уравнением  $n$ -го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0,$$

Где  $F$  — некоторая функция, зависящая от  $x$ ,  $y$  и производных разного порядка. Число  $n$  называется порядком уравнения.

Функция  $y(x)$  называется **решением** (или **интегралом**) дифференциального уравнения, если она  $n$  раз дифференцируема и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия.

Любое конкретное решение уравнения  $n$ -го порядка называется **частным решением**.

**Общим решением** дифференциального уравнения

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

называется функция  $y = \Phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ ,

содержащая некоторые постоянные (параметры)  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме:  $f(x, y) = 0$  или  $G(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$ . Такие неявно заданные решения называются **частным интегралом** или **общим интегралом** уравнения.

### **Пример 1.**

Решить диф. уравнение первого порядка.

$$xy' = y$$

Здесь нам пригодится обозначение производной в более громоздкой форме:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{xdy}{dx} = y.$$

Разделим переменные, то есть сделаем так, чтобы с одной стороны равенства были  $x$ , а с другой  $y$ .

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные:

$$\ln |y| = \ln |x| + C$$

Константу  $C$  достаточно записать один раз (*т.к. константа + константа всё равно равна другой константе*). В большинстве случаев её помещают в правую часть.

Строго говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решённым. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено в неявном виде. Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть,  $\ln|y| = \ln|x| + C$  – это общий интеграл.

Ответ в такой форме вполне приемлем, но нет ли варианта получше? Давайте попытаемся получить **общее решение**.

Пожалуйста, **запомните первый технический приём**, он очень распространен и часто применяется в практических заданиях: *если в правой части после интегрирования появляется логарифм, то константу во многих случаях (но далеко не всегда!) целесообразно записать тоже под логарифмом*.

То есть, **ВМЕСТО** записи  $\ln|y| = \ln|x| + C$  обычно пишут  $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$ .

Зачем это нужно? А для того, чтобы легче было выразить «игрек».

Используем **свойство логарифмов**  $\ln|a| + \ln|b| = \ln|ab|$ . В данном случае:  
 $\ln|y| = \ln|Cx|$

Теперь логарифмы и модули можно убрать:  
 $y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

**Ответ:** общее решение:  $y = Cx$ , где  $C = const$ .

Ответы многих дифференциальных уравнений довольно легко проверить. В нашем случае это делается совсем просто, берём найденное решение  $y = Cx$  и дифференцируем его:

$$y' = (Cx)' = C$$

После чего подставляем  $y = Cx$  и производную  $y' = C$  в исходное уравнение  $xy' = y$ :

$$x \cdot C = Cx$$

$Cx = Cx$  – получено верное равенство, значит, общее решение  $y = Cx$  удовлетворяет уравнению  $xy' = y$ , что и требовалось проверить.

**Пример 2.**  $\frac{y'}{\cos x} = y \rightarrow \frac{dy}{\cos x dx} = y \rightarrow \frac{dy}{y} = \cos x dx \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \cos x dx \rightarrow \ln|y| = \sin x + C$

Мы получили решение в неявном виде, этого достаточно. Но можно и выразить  $y$ .

$$y = e^{\sin x + C}$$

## Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

В чём отличие однородных дифференциальных уравнений от других типов ДУ? Это проще всего сразу же пояснить на конкретном примере.

### **Пример 3**

Решить дифференциальное уравнение  $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

В первую очередь необходимо проверить, а нельзя ли разделить переменные? Обычно такой анализ проводят мысленно или пытаются разделить переменные на черновике.

В данном примере **переменные разделить нельзя**, об этом говорит наличие множителя  $e^{\frac{y}{x}}$ .

Как понять, **является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение: **вместо  $x$  подставляем  $\lambda x$ , вместо  $y$  подставляем  $\lambda y$ , производную не трогаем:**

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}$$

Буква лямбда – это условный параметр, и здесь он играет следующую роль: если в результате преобразований удастся «уничтожить» ВСЕ лямбды и получить исходное уравнение, то данное дифференциальное уравнение **является однородным**.

Очевидно, что лямбды сразу сокращаются в показателе степени:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda y - \lambda x e^{\frac{y}{x}}$$

Теперь в правой части выносим лямбду за скобки:

$$\lambda x \cdot y' = \lambda (y - x e^{\frac{y}{x}})$$

и обе части делим на эту самую лямбду:

$$xy' = y - x e^{\frac{y}{x}}$$

В результате **все** лямбды исчезли, и мы получили исходное уравнение.

**Вывод:** Данное уравнение является однородным

**Решение однородного дифференциального уравнения.**

Потребуется осуществить стандартную замену переменной.

Функцию «игрек» следует **заменить произведением** некоторой функции  $t$  (тоже зависящей от «икс») и «икса»:

$$y = t(x) \cdot x, \text{ почти всегда пишут коротко: } y = tx$$

Выясняем, во что превратится производная  $y'$  при такой замене, используем правило дифференцирования произведения. Если  $y = tx$ , то:  
 $y' = (tx)' = (t)'x + t(x)' = t'x + t$

Подставляем  $y = tx$  и  $y' = t'x + t$  в исходное уравнение  $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ :

$$x(t'x + t) = tx - xe^{\frac{tx}{x}}$$

После данной замены и проведенных упрощений мы гарантировано получим уравнение с разделяющимися переменными.

После подстановки проводим максимальные упрощения:

$$x(t'x + t) = x(t - e^t)$$

$$t'x + t = t - e^t$$

$$t'x = -e^t$$

Далее решаем уравнение с разделяющимися переменными.

Поскольку  $t$  – это функция, зависящая от «икс», то её производную можно

записать стандартной дробью:  $t' = \frac{dt}{dx}$ .

Таким образом:

$$x \frac{dt}{dx} = -e^t$$

Разделяем переменные, при этом в левой части нужно собрать только «тэ», а в правой части – только «иксы»:

$$-e^{-t} dt = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены, интегрируем:

$$-\int e^{-t} dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$e^{-t} = \ln|x| + \ln|C|$$

После того, как уравнение проинтегрировано, нужно провести *обратную замену*, она тоже стандартна и единственна:

Если  $y = tx$ , то  $t = \frac{y}{x}$

В данном случае:  $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$

**В 18-19 случаях из 20 решение однородного уравнения записывают в виде общего интеграла.**

**Ответ:** общий интеграл:  $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$ , где  $C = const$

Почему почти всегда ответ однородного уравнения даётся в виде общего интеграла?

В большинстве случаев невозможно выразить «игрек» в явном виде (получить общее решение), а если и возможно, то чаще всего общее решение получается громоздким и корявым.

**Пример 4.**

Решить дифференциальное уравнение  $(2x+y)dx - xdy = 0$ .

1. Проверим, можно ли разделить переменные. Нельзя.
2. Проверим, является ли уравнение однородным.  
 $(2\lambda x + \lambda y)dx - \lambda x dy = 0 \rightarrow \lambda(2x + y)dx - \lambda x dy = 0 \rightarrow \lambda((2x + y)dx - xdy) = 0$ . Разделим на  $\lambda$  обе части уравнения. Получим исходное уравнение.
3.  $y=tx \rightarrow y' = t'x + x't = t'x + t = \frac{dy}{dx}$ . Зачем нужен последний шаг? Дело в том, что в нашем уравнении нет  $y'$ . Мы можем его получить, разделив уравнение на  $dx$ :  $2x+y-x \cdot \frac{dy}{dx} = 0$ . (Примечание: уравнение  $2x+y-x \cdot y' = 0$  и исходное уравнение – это одно и то же уравнение)

4. Подставляем:  $2x+tx - x(t'x + t) = 0$ .

Раскрываем скобки и преобразовываем:  $2x+tx - xt'x - xt = 0 \rightarrow$

$$2x - x^2 t' = 0 \rightarrow 2x - x^2 \frac{dt}{dx} = 0.$$

5. Разделяем переменные:  $2x = x^2 \frac{dt}{dx}$ ; умножим обе части на  $\frac{dx}{x^2} \rightarrow \frac{2x dx}{x^2} = dt \rightarrow \frac{2dx}{x} = dt$ . Получили уравнение с разделенными переменными. ( $x \neq 0$ )

6. Интегрируем обе части.

$$\int \frac{2dx}{x} = \int dt$$

$$2\ln|x| = t \text{ или } t = 2\ln|x| + C$$

7. Возвращаемся к исходным переменным.  $y=tx, t = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} = 2\ln|x| + C$$

$$y = x(2\ln|x| + C)$$

Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

В дифференциальное уравнение второго порядка обязательно входит вторая производная  $y''$  и не входят производные более высоких порядков:  
 $F(x, y, y', y'') = 0$

Самое примитивное дифференциальное уравнение второго порядка выглядит так:  $y'' = 0$

**Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет следующий вид:  
 $y'' + py' + qy = 0$ , где  $p$  и  $q$  – константы (числа), а в правой части – строго ноль.

**Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет вид:  
 $y'' + py' + qy = f(x)$ , где  $p$  и  $q$  – константы, а  $f(x)$  – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция  $f(x)$  может быть числом, *отличным от нуля*.

Рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:

$$y'' + py' + qy = 0$$

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:

вместо второй производной записываем  $\lambda^2$ ;  
вместо первой производной записываем просто «лямбду»;  
вместо функции  $y$  ничего не записываем.

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  – это обычное квадратное уравнение, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий. На практике мы будем использовать готовые формулы.

1) Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня -

общее решение однородного уравнения выглядит так:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \text{ где } C_1, C_2 \text{ – константы.}$$

2) Если характеристическое уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  имеет два **равных** действительных корня  $\lambda_1 = \lambda_2$  (дискриминант  $D = 0$ ), то общее решение однородного уравнения принимает вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}, \text{ где } C_1, C_2 \text{ – константы.}$$

3) Если характеристическое

уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  имеет **сопряженные** комплексные

корни  $\lambda_1 = \alpha - \beta i$ ,  $\lambda_2 = \alpha + \beta i$  (дискриминант  $D < 0$ ), то общее решение

однородного уравнения принимает вид:  
 $y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ , где  $C_1, C_2$  – константы.

*Примечание:* Сопряженные комплексные корни почти всегда записывают кратко следующим образом:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

### Пример 5.

Решить дифференциальное уравнение  $y'' + y' - 2y = 0$

**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 9, \sqrt{D} = 3$$

$$\lambda_1 = \frac{-1-3}{2} = -2, \quad \lambda_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Получены два различных действительных корня. Всё, что осталось сделать – записать ответ, руководствуясь формулой  $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

**Ответ:** общее решение:  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ , где  $C_1, C_2 - const$

### Пример 6

Решить дифференциальное уравнение  $y'' - 6y' + 9y = 0$

**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

Здесь можно вычислить дискриминант, получить ноль и найти кратные корни. Но можно невозбранно применить известную школьную формулу сокращенного

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

(конечно, формулу нужно увидеть, это приходит с опытом решения)

Получены два кратных действительных корня  $\lambda_{1,2} = 3$

**Ответ:** общее решение:  $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ , где  $C_1, C_2 - const$

### Пример 5

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка  
 $y'' - 2y' + 10y = 0$

**Решение:** Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$$D = 4 - 40 = -36$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

– получены сопряженные комплексные корни



**Ответ:** общее решение:  $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$ , где  $C_1, C_2 - const$

Внимательно проработайте рассмотренные примеры. Выпишите все формулы в тетрадь для справочных материалов.

Практическая работа будет на следующем занятии.