Занятие 16

Тема. Элементы и множества. Операции над множествами. Свойства операций над множествами.

Множество – это фундаментальное понятие не только математики, но и всего окружающего мира. Возьмите прямо сейчас в руку любой предмет. Вот вам и множество, состоящее из одного элемента.

В широком смысле, **множество – это совокупность объектов (элементов), которые понимаются как единое целое** (по тем или иным признакам, критериям или обстоятельствам). Причём, это не только материальные объекты, но и буквы, цифры, теоремы, мысли, эмоции и т.д.

Обычно множества обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ *(как вариант, с подстрочными индексами:* A_1, A_2, B_7 *и т.п.)*, а его элементы записываются в фигурных скобках, например:

$A = \{а, б, в, \ldots, э, ю, я\}$ **– множество букв русского алфавита.**

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ **– множество натуральных чисел.**

Подмножества

Практически всё понятно из самого названия:
множество G является **подмножеством** множества A, если каждый элемент множества G принадлежит множеству A. Иными словами, множество G содержится во множестве A:
$G \subset A$

Значок $\subset$ называют значком *включения*.

Числовые множества

Как известно, исторически первыми появились натуральные числа, предназначенные для подсчёта материальных объектов (людей, кур, овец, монет и т.д.). Это множество уже встретилось в статье, единственное, мы сейчас чуть-чуть модифицируем его обозначение. Дело в том, что числовые множества принято обозначать жирными, стилизованными или утолщёнными буквами. Мне удобнее использовать жирный шрифт:
$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Иногда к множеству натуральных чисел относят ноль.

Если к множеству $\mathbf{N}$ присоединить те же числа с противоположным знаком и ноль, то получится *множество целых чисел*:

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, рационализаторы и лентяи записывают его элементы со значками *«плюс минус»*:))

$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Совершенно понятно, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел:
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ – поскольку каждый элемент множества $\mathbf{N}$ принадлежит множеству $\mathbf{Z}$. Таким образом, любое натуральное число можно смело назвать и целым числом.

Название множества тоже «говорящее»: целые числа – это значит, никаких дробей.

Следующим числовым множеством идёт *множество рациональных чисел*:
$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N} \right\}$ – то есть, любое рациональное число представимо в виде дроби $\frac{m}{n}$ с целым *числителем* и натуральным *знаменателем*.

Очевидно, что множество целых чисел является *подмножеством* множества рациональных чисел:
$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$

И в самом деле – ведь любое целое число можно представить в виде рациональной дроби $\frac{m}{n}$, например: $-2 = \frac{-2}{1}, \quad 5 = \frac{5}{1}$ и т.д. Таким образом, целое число можно совершенно законно назвать и рациональным числом.

Характерным «опознавательным» признаком рационального числа является то обстоятельство, что при делении числителя на знаменатель получается либо
$\frac{-3}{1} = -3$ – целое число,

либо
$\frac{3}{8} = 0{,}375$ – *конечная* десятичная дробь,

либо
$\frac{7}{11} = 0{,}\underbrace{63}\underbrace{63}\underbrace{63}\underbrace{63}\dots$ – бесконечная *периодическая* десятичная дробь *(повтор может начаться не сразу)*.

В высшей математике все действия стремимся выполнять в обыкновенных (правильных и неправильных) дробях

Согласитесь, что иметь дело с дробью $\frac{3}{8}$ значительно удобнее, чем с десятичным числом 0,375 *(не говоря уже о бесконечных дробях)*.

Помимо рациональных существует множество $\mathbf{I}$ иррациональных чисел, каждое из которых представимо в виде бесконечной *НЕпериодической* десятичной дроби. Иными словами, в «бесконечных хвостах» иррациональных чисел нет никакой закономерности:

$\pi = 3,1415926535...$

$e = 2,7182818284...$

$\sqrt{2} = 1,414213562...$

Объединение рациональных и иррациональных чисел образует *множество действительных (вещественных) чисел*:

$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$

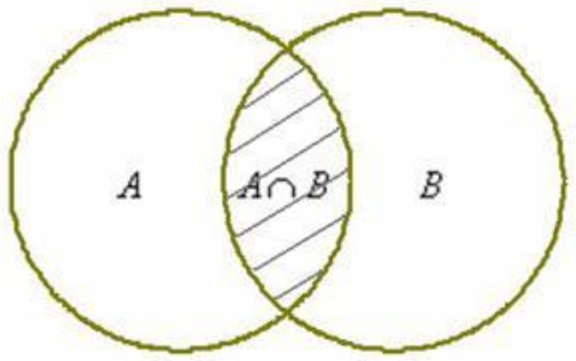
$\cup$ – значок *объединения* множеств.

Действия над множествами. Диаграммы Венна

Диаграммы Венна – это схематическое изображение действий с множествами.

1) **Пересечение** множеств характеризуется логической связкой **И** и обозначается значком $\cap$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, каждый элемент которого принадлежит **и** множеству A, **и** множеству B. Грубо говоря, пересечение – это общая часть множеств:



Так, например, для множеств $A = \{i, j, k\}, B = \{k, m\}$:

$A \cap B = \{k\}$

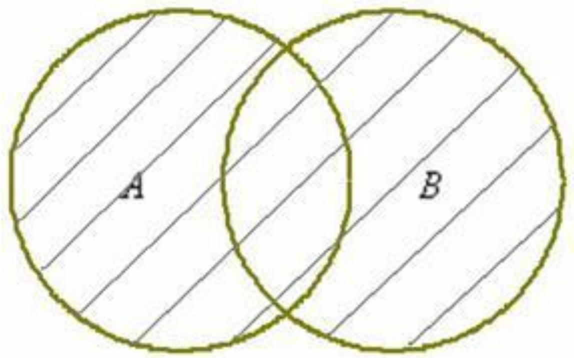
Если у множеств нет одинаковых элементов, то их пересечение пусто. Такой пример нам только что встретился при рассмотрении числовых множеств:

$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \varnothing$

Множества рациональных и иррациональных чисел можно схематически изобразить двумя непересекающимися кругами.

2) **Объединение** множеств характеризуется логической связкой **ИЛИ** и обозначается значком $\cup$

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A **или** множеству B:



Запишем объединение множеств $A = \{1, 3, 5\}, B = \{-1, 0, 1\}$:
$A \cup B = \{-1, 0, 1, 3, 5\}$ – грубо говоря, тут нужно перечислить все элементы множеств A и B, причём одинаковые элементы *(в данном случае единица на пересечении множеств)* следует указать один раз.

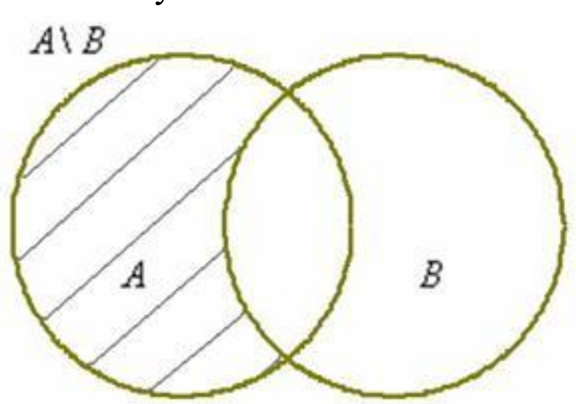
Но множества, разумеется, могут и не пересекаться, как это имеет место быть с рациональными и иррациональными числами:
$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$

В этом случае можно изобразить два непересекающихся заштрихованных круга.

Операция объединения применима и для бОльшего количества множеств, например, если $A = \{1, 2\}, B = \{0, 7\}, C = \{-10, -3\}$, то:

$A \cup B \cup C = \{-10, -3, 0, 1, 2, 7\}$, при этом числа вовсе не обязательно располагать в порядке возрастания. Не мудрствуя лукаво, результат можно записать и так:
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 0, 7, -10, -3\}$

3) **Разностью** множеств A и B называют множество $A \setminus B$, каждый элемент которого принадлежит множеству A **и** не принадлежит множеству B:

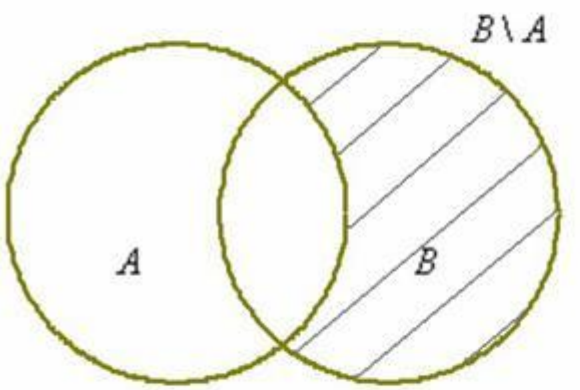


Разность $A \setminus B$ читаются следующим образом: «а без бэ». И рассуждать можно точно так же: рассмотрим множества $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, a, d, 5\}$.

Чтобы записать разность $A \setminus B$, нужно из множества A «выбросить» все элементы, которые есть во множестве B:
$A \setminus B = \{b, c\}$

Пример с числовыми множествами:
$\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ – здесь из множества целых чисел исключены все натуральные, да и сама запись $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ так и читается: «множество целых чисел без множества натуральных».

Зеркально: **разностью** множеств B и A называют множество $B \setminus A$, каждый элемент которого принадлежит множеству B **и** не принадлежит множеству A:



Для тех же множеств $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, a, d, 5\}$
$B \setminus A = \{1, 5\}$ – из множества B «выброшено» то, что есть во множестве A.

А вот эта разность оказывается пуста: $\mathbf{N} \setminus \mathbf{Z} = \varnothing$. И в самом деле – если из множества натуральных чисел исключить целые числа, то, собственно, ничего и не останется :)

Кроме того, иногда рассматривают *симметрическую* разность $A \Delta B$, которая объединяет оба «полумесяца»:
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ – иными словами, это «всё, кроме пересечения множеств».