Занятие 18

Тема. Матрицы. Действия над матрицами. Определители первого и второго порядков. Свойства определителей. Определители 3 порядка.

Определение.

Матрицей размера n×m называется прямоугольная таблица специального вида, состоящая из n строк и m столбцов, заполненная числами.

Матрица - это таблица данных, которая берется в круглые скобки:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Матрица, содержащая n строк и m столбцов, называется матрицей размера n×m. При необходимости размер матрицы записывается следующим образом: $\mathbf{A}_{\mathbf{n\times m}}$.

Элементы матрицы **A** обозначаются a_{ij}, где i - номер строки, в которой находится элемент, j - номер столбца.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 44 \\ 4 & 6 & 7 & 9 \\ 11 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$a_{34} = 9$

Определение.

Строка матрицы называется **нулевой**, если все ее элементы равны нулю.

Определение.

Если хотя бы один из элементов строки матрицы не равен нулю, то строка называется **ненулевой**.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ < нулевая строка

Определение.

Столбец матрицы называется **нулевым**, если все его элементы равны нулю.

Определение.

Если хотя бы один из элементов столбца матрицы не равен нулю, то столбец называется **ненулевым**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

^

нулевой столбец

<u>Действия над матрицами.</u>

Определение.

Произведением матрицы **A** на число k называется матрица **B** = k · **A** того же размера, полученная из исходной умножением на заданное число всех ее элементов:

$b_{i,j} = k \cdot a_{i,j}$

Пример 1.

Найти произведение матрицы A = 4490 и числа 5.

Решение:

$$5\cdot A = 5\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 4 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 9 & 5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 45 & 0 \end{pmatrix}$$

Определение.

Сложение матриц (сумма матриц) A + B есть операция вычисления матрицы **C**, все элементы которой равны попарной сумме всех соответствующих элементов матриц **A** и **B**, то есть каждый элемент матрицы **C** равен:

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Определение.

Вычитание матриц (разность матриц) A - B есть операция вычисления матрицы **C**, все элементы которой равны попарной разности всех соответствующих элементов матриц **A** и **B**, то есть каждый элемент матрицы **C** равен:

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

Складывать и вычитать можно матрицы одного размера, в результате получается матрица того же размера.

<u>Определители матрицы.</u>

Обозначение

Определитель матрицы A обычно обозначается det(A), |A|, или Δ(A).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2.$

Найти определитель матрицы второго порядка.

$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - (-1) \cdot 6 = 16 + 6 = 22.$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = -2 + 6 = 4.$

Найти определитель матрицы третьего порядка.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 7 \cdot 6) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 7 \cdot 5) =$

$=45-48-2(36-42)+3(32-35)=-3-2\cdot(-6)+3\cdot(-3)=$

$=-3+12-9=0.$