Занятие 20

Тема. Расширение понятия числа. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Формы записи комплексных чисел. Действия над комплексными числами.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Уже простейшие алгебраические операции над действительными числами (извлечение квадратного корня из отрицательного числа, решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом) выводят за пределы множества действительных чисел. Дальнейшее обобщение понятия числа приводит к комплексным числам. Замечательным свойством множества комплексных чисел является его замкнутость относительно основных математических операций. Иначе говоря, основные математические операции над комплексными числами не выводят из множества комплексных чисел.

Комплексным числом z (***в алгебраической форме***) называется выражение

$z=x+iy$

Где x, y – произвольные действительные числа, i – ***мнимая единица***, определяемая условием $i^2=-1$

Число x называется ***действительной частью*** комплексного числа z обозначается $x=\operatorname{Re} z$ (от латинского «*realis*»), число y называется ***мнимой частью*** комплексного числа z и обозначается $y=\operatorname{Im} z$ (от латинского «*imaginarius*»).

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части: $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Два комплексных числа равны либо не равны (понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся).

Комплексно-сопряженным к числу $z=x+iy$ называется число $\bar{z}=x-iy$.Очевидно, комплексно–сопряженное число к числу $\bar{z}$ совпадает с числом z : $\bar{\bar{z}}=z$

Арифметические операции. Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел производят по обычным правилам алгебры.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

сумма $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,

разность $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$,

произведение $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$,

частное (при $z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 1. Заданы комплексные числа $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 3 - 5i$.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 + \overline{z_1}$.

Решение. $z_1 + z_2 = (-2 + 3) + (3 - 5)i = 1 - 2i$;

$z_1 - z_2 = (-2 - 3) + (3 + 5)i = -5 + 8i$;

$\overline{z_1} = -2 - 3i \quad \Rightarrow \quad z_1 + \overline{z_1} = (-2 - 2) + (3 - 3)i = -4$.

Пример 2. Найти i^3, i^4, i^8, i^{10}, i^{21}.

Решение. $i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$.

$i^8 = (i^4)^2 = 1$, $i^{10} = (i^4)^2 \cdot i^2 = -1$, $i^{21} = (i^4)^5 \cdot i = i$.

Замечание. Степени числа i можно представить в виде таблицы

$i \quad i^2 \quad i^3 \quad i^4 \quad i^5 \quad i^6 \quad i^7 \quad i^8 \ldots$

$i \quad -1 \quad -i \quad 1 \quad i \quad -1 \quad -i \quad 1 \ldots$

Пример 3. Перемножить числа $z_1 = 5+2i$ и $z_2 = -4+7i$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = (5+2i)\cdot(-4+7i) = 5\cdot(-4) + 5\cdot 7i + 2i\cdot(-4) + 2i\cdot 7i =$

$= -20+35i-8i+14i^2 = -20+27i-14 = -34+27i$

Пример 4. Вычислить а) $(1-i)^2$; б) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; в) $(1+i)^4$.

Решение.

а) Раскроем квадрат разности:

$(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$.

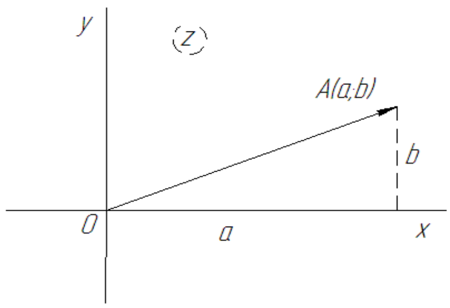
б) Раскроем куб суммы:

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 i^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 i^3 =$$

$$\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}i^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}i^3 = \frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i = -1$$.

Пусть x=a, y=b. Комплексное число примет вид Z= a+bi.

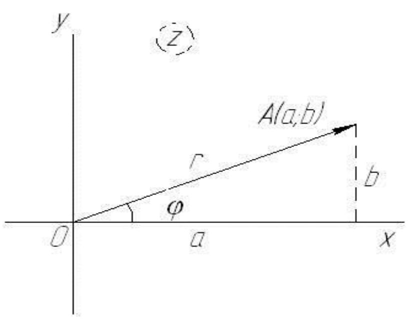
Всякое комплексное число можно изобразить на плоскости Oxy в виде точки $A(a,b)$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется плоскостью комплексного переменного z.



Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, мнимые числа изображаются точками оси ординат. Поэтому ось Ox называют действительной осью, а ось ординат $Oy -$ мнимой осью.

Соединив точку $A(a,b)$ с началом координат, получим вектор $\vec{OA}$. В некоторых случаях удобно считать геометрическим изображением комплексного числа $z=a+bi$ вектор $\vec{OA}$. При этом действительная и мнимая части числа являются проекциями вектора $\vec{OA}$ на действительную и мнимую оси.

Обозначим через φ и $r\,(r>0)$ полярные координаты точки $A(a,b)$, считая начало координат полюсом, а положительное направление оси $Ox -$ полярной осью.



Геометрическое изображение комплексного числа

Тогда имеют место следующие равенства

$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi.$

Следовательно, комплексное число $z = a + bi$ можно представить в виде

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

– это есть тригонометрическая форма записи комплексного числа z, r называется модулем комплексного числа $z, \varphi - i$ аргументом комплексного числа z.

Пример 17.3 Изобразим на комплексной плоскости числа $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3 + 2i$, $z_4 = -1 - i$, $z_5 = -3$:

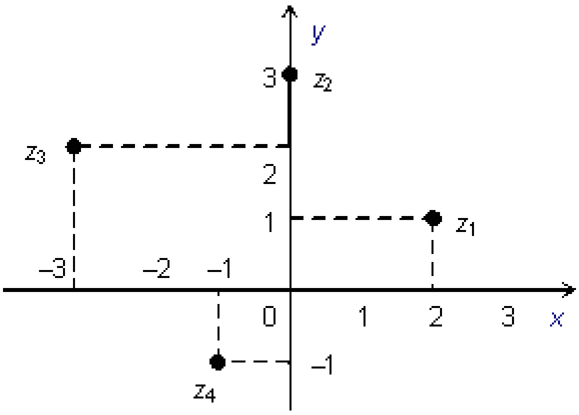


Рис.17.1.Изображение комплексных чисел точками плоскости

Однако чаще комплексные числа изображают в виде вектора с началом в точке O, а именно, комплексное число $z = a + bi$ изображается радиус-вектором точки с координатами (a, b). В этом случае изображение комплексных чисел из предыдущего примера будет таким:

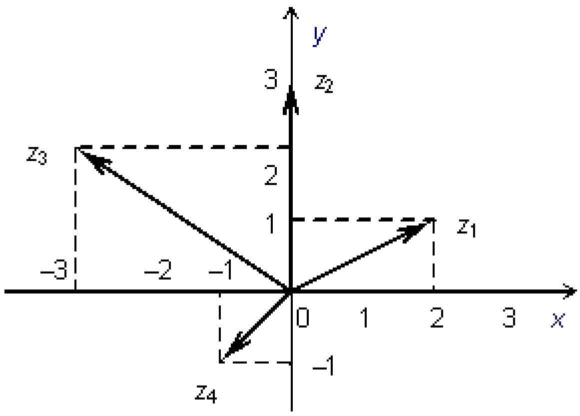


Рис.17.2.Изображение комплексных чисел векторами

1)

Отметим, что изображением суммы двух комплексных чисел z, w является вектор, равный сумме векторов, изображающих числа z и w. Иными словами, при сложении комплексных чисел складываются и векторы, их изображающие (рис. 17.3).

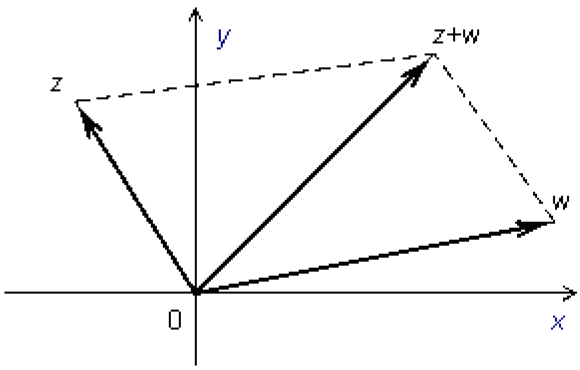
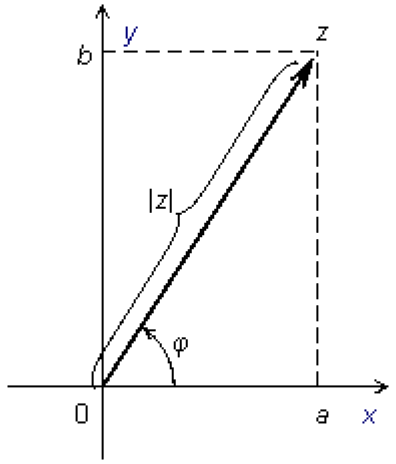


Рис.17.3.Изображение суммы комплексных чисел

Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается радиус-вектором. Тогда длина этого вектора называется модулем числа z и обозначается $|z|$. Из рисунка 17.4 очевидно, что

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (17.6)$$


y
b
z
|z|
φ
0
a
x