Занятие 21

Тема. Классификация событий. Статистическое определение вероятности. Теорема сложения, умножения вероятностей. Случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины. Математическое ожидание, дисперсия. Функция распределения случайной величины.

Основные понятия теории вероятностей

Первичным понятием теории вероятностей является понятие события. Что же такое событие?

Событие – это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит при определенных условиях.

События обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C…..Любое событие происходит вследствие испытания (эксперимента, исследования).

Испытание – это условия, в результате которого происходит или не происходит событие.

Иными словами, событие – это явление, происходящее или не происходящее в определенном испытании.

Например:

Испытание	События
Подбрасывание монеты	A- появление герба (орел), B- появление числа (решка)
Бросание кубика	A-появление 1 очка, B – появление 2 очков, C – появление 3 очков и т.д.
Выбор пирожка с капустой из 10 пирожков	A – выбор пирожка с капустой, B – выбор пирожка, например, с вишней (т.е. не с капустой).

<u>Виды событий.</u>

Вид события	Определение	Примеры
Случайное	Событие, которое может произойти или не произойти во время проведения определенного	-вытащить короля из колоды карт;

	испытания. Случайные события могут быть массовыми и единичными.	
Массовые	Однородные события, наблюдающиеся при определенных условиях, которые могут быть повторены (можно наблюдать) неограниченное количество раз.	-попадание или промах в серии выстрелов; -появление бракованных деталей при серийном выпуске -радиоактивный распад атомов вещества.
Единичное	События, которые нельзя повторить или наблюдать неограниченное количество раз. Теория вероятностей изучает только массовые случайные события.	Падение Тунгусского метеорита
Достоверное	Событие, которое вследствие данного испытания обязательно произойдет	-появление на одной из граней кубика натурального числа меньше 7.
Невозможное	Событие, которое вследствие данного испытания не может произойти	-нахождение в списке учащихся ученика с датой рождения 30 февраля
Полная группа событий	Множество событий таких, что в результате каждого испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.	A_1 – появление числа 1, A_2 – появление числа 2, A_3 – появление числа 3, A_4 –появление числа 4, A_5 –появление числа 5, A_6-появление числа 6 при бросании

		игрального кубика. Или B_1-появление четного числа; B_2- появление нечетного числа.
Попарно несовместимые	События, два из которых не могут произойти одновременно	Попадание и промах при одном выстреле; Появление цифр 1,2,3,4,5,6 при одном броске игрального кубика – это шесть несовместимых событий
Равновозможные	События, каждое из которых не имеет преимуществ в появлении чаще, чем другое, во время многоразовых испытаний, которые проводятся при одинаковых условиях.	Появление цифр 1,2,3,4,5,6 при одном броске игрального кубика.
Противоположные	События называются противоположными друг другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них. Обозначается противоположное событие символом $\bar{A}$. $P(A)+P(\bar{A})=1$	Примеры противоположных событий: промах и попадание при выстреле, выпадение герба или цифры при одном подбрасывании монеты.

Если события:

Образуют полную группу событий;

Являются несовместимыми;

Являются равновозможными,

то такие события образуют *пространство элементарных событий.*

Вероятностью события А называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов. Пишем Р(А)=$\frac{m}{n}$

Задачи о выборе объектов из набора

Задача 1. В коробке 14 красных, 9 желтых и 7 зеленых шаров. Из коробки наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется желтым?

Решение. Общее число исходов равно числу шаров – 14+9+7=30. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 9. Искомая вероятность равна $\frac{9}{30} = 0{,}3.$

Ответ: 0,3.

Задача 2. На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно набранная цифра будет четной и больше 5?

Решение. Исходом здесь является нажатие определенной клавиши, поэтому всего имеется 10 равновозможных исходов. Указанному событию благоприятствуют исходы, означающие нажатие клавиши 6 или 8 – два исхода. Искомая вероятность равна $\frac{2}{10} = 0{,}2.$

Ответ: 0,2.

Задача 3. В чемпионате мира участвуют 24 команды. С помощью жребия их нужно разделить на 4 группы по шесть команд в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп: 1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4,4. Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется в третьей группе?

Решение. Общее число исходов равно числу карточек – их 24. Благоприятных исходов 6. Так как номер 3 написан на шести карточках. Искомая вероятность равна $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25.

Задача 4. Какова вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 4 до 23 делится на три?

Решение. На отрезке от 4 до 23 имеется 23-4+1=20 натуральных чисел, значит, всего возможно 20 исходов. На этом отрезке кратны 3 числа 6,9,12, 15, 18, 21. Всего 6 чисел, поэтому рассматриваемому событию благоприятствуют 6 исходов. Искомая вероятность равна $\frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$

Ответ: 0,3.

Задача 5. Из 20 билетов, предлагаемых на экзамене. Школьник может ответить только на 17. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить на выбранный наугад билет?

Решение.

1 способ.

Так как школьник может ответить на 17 билетов, то на 3 билета он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов по определению равна $\frac{3}{20} = 0{,}15.$

2 способ.

Обозначим через А событие «школьник может ответить на билет». Тогда P(A)=$\frac{17}{20} = 0{,}85$. Вероятность противоположного события равна P($\overline{A}$)=1 – P(A)=1 – 0,85=0,15.

Ответ: 0,15.

Задача 6. В чемпионате по художественной гимнастике участвуют 20 спортсменок: 6 из России. 5 из Германии, остальные из Франции. Порядок выступлений определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая седьмой, окажется из Франции.

Решение.

У всех спортсменок равные шансы выступать седьмой. Поэтому имеется 20 равновероятных исходов. Из Франции 20-6-5=9 спортсменок, поэтому имеется 9 благоприятных для указанного события исходов. P(A)=$\frac{9}{20} = 0{,}45.$

Ответ: 0,45.

Задача 7Сам. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 50 докладов – первые три дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

Решение.

50 – 12*3=14, 14:2=7. P(A)=$\frac{7}{50} = 0{,}14.$

Ответ: 0,14

Задача 8Сам. На борту самолета10 мест рядом с запасными выходами и 15 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажиров высокого роста. Пассажир К. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру К. достанется удобное места, если всего в самолете 200 мест.

Решение. $\frac{15+10}{200} = 0{,}125$

Задача 9Сам. Из 1000 собранных на заводе кофемолок 7 штук бракованных. Эксперт проверяет одну наугад выбранную кофемолку из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемая кофемолка окажется.

Решение. P(A)=$\frac{7}{1000} = 0{,}007.$

Задача 10. Завод производит холодильники. В среднем на 100 качественных холодильников приходится 15 холодильников со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный холодильник окажется качественным. Результат округлите до сотых.

Решение. Обратить внимание на то, что фраза «на 100 качественных холодильников приходится 15 холодильников со скрытыми дефектами» указывает на то, что 15 штук не входят в 100 качественных. Общее число исходов равно 115. P(A)=$\frac{100}{115} = 0,87 \ldots$

Задача 11. Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 16 теннисистов, среди которых 7 из России, в том числе Максим Зайцев. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Зайцев будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Решение. Здесь исход – это соперник Максима Зайцева. Так как всего участников 16, а сам с собой Максим играть не может, то имеется 16 – 1 =15 равновероятных исходов. Благоприятный исход – соперник из России. Таких исходов 7 – 1 =6 (из числа россиян исключаем самого Максима). $\frac{6}{15} = 0,4$

Задача 12. Футбольную секцию посещают 33 человека, среди них два брата - Антон и Дмитрий. Посещающих секцию случайным образом делят на три команды по 11 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Антон и Дмитрий окажутся в одной команде.

Решение. Поместим Антона на случайно выбранное место из 33. Свободных мест осталось 32, причем в одной команде с Антоном – 10. P(A)=$\frac{10}{32} = 0,3125$.

Задача 13. Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали ходить. Найдите вероятность того, что часовая стрелка застыла, достигнувотметки11, но не дойдя до отметки 2 часа.

Решение. Циферблат разбит на 12 секторов. Всего 12 исходов, указанному событию благоприятствуют три исхода (сектора между 11и12, 12 и 1, 1 и 2). P(A)=$\frac{3}{12} = 0,25$.

Задачи о подбрасывании монеты

Задача 14. Симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Решение. В таких задач удобно выписать все возможные исходы: РР, РО, ОР, ОО. Р(А)=0,5

Ценное замечание: если монету бросают n раз, то имеется 2^n равновозможных исходов.

Задача 15. Симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

Решение. Возможно 2^3 исходов. Благоприятствуют событию «орел выпадет ровно два раза» 3 исхода: РОО, ОРО, ООР. Р(А)=$\frac{3}{8}$ =0,375.

Задача 16. Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая команда начнет игру. Команда «Изумруд» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Изумруд» выиграет жребий ровно один раз.

Решение. Всего исходов: ВВП, ВПВ, ПВВ, ВПП, ПВП, ППВ, ППП, ВВВ. Благоприятствуют событию ВПП, ПВП, ППВ. Р(А)= $\frac{3}{8}$ =0,375.

Задача 17Сам. Симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что в первый раз выпадет решка, во второй и третий – орел.

Задачи о бросках кубика

Задача 18. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «сумма очков равна 8»? (5)

Задача 19. Одновременно бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 4 очка. Результат округлите до сотых.

Решение.

Исход – пара чисел, выпавшие на кубиках. Всего имеется 36 равновозможных исходов. (Если бросают n игральных кубиков, то имеется 6^n равновозможных исходов. Столько же исходов получается. Если один игральный кубик бросают n раз подряд). 1-3, 2-2, 3-1 – 3 исхода. P(A)=$\frac{3}{12} = 0{,}08$.

Задача 20. Одновременно бросают три кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков. Результат округлите до сотых.

Решение. 1-1-3, 1-3-1, 3-1-1, 1-2-2, 2-1-2, 2-2-1 – 6 исходов. $6^3 = 216$.

P(A)=$\frac{6}{216} = 0{,}027 \ldots \approx 0{,}03$.

Распечатка

Задача 7. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 50 докладов – первые три дня по 12 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Какова вероятность того, что доклад профессора Н. окажется запланированным на последний день конференции?

Задача 8. На борту самолета10 мест рядом с запасными выходами и 15 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажиров высокого роста. Пассажир К. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру К. достанется удобное места, если всего в самолете 200 мест.

Задача 9. Из 1000 собранных на заводе кофемолок 7 штук бракованных. Эксперт проверяет одну наугад выбранную кофемолку из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемая кофемолка окажется бракованной.

Задача 10. Завод производит холодильники. В среднем на 100 качественных холодильников приходится 15 холодильников со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленный холодильник окажется качественным. Результат округлите до сотых.

Законом распределения дискретной случайной величины называется любое правило (функция, таблица) $p(x)$, позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной (например, вероятность того, что она примет какое-то значение или попадёт в какой-то интервал).

Наиболее просто и удобно закон распределения дискретной случайной величины задавать в виде следующей таблицы:

Значение	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	...	p_n

Такая таблица называется **рядом распределения дискретной случайной величины**. В верхней строке ряда распределения перечислены в порядке возрастания все возможные значения дискретной случайной величины (иксы), а в нижней - вероятности этих значений (p).

Математическое ожидание часто называют просто средним значением случайной величины. **Дисперсия** случайной величины - характеристика рассеивания, разбросанности случайной величины около её **математического ожидания**. ... В этих случаях ограничиваются приблизительным описанием случайной величины с помощью числовых характеристик.

Фу́нкция распределе́ния в теории вероятностей — **функция**, характеризующая распределение **случайной величины** или **случайного** вектора; вероятность того, что случайная **величина** X примет значение, меньшее или равное x, где x — произвольное действительное число.