Занятие 8

Тема. Определенный интеграл. Основные понятия определенного интеграла. Геометрический и физический смысл определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла (формула Ньютона-Лейбница)

Уважаемые курсанты! Повторяем данный материал, конспектируем его в тетрадь, разбираем примеры. Высылать НЕ надо.

Теорема. **Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$.

Приведенную формулу обычно называют *формулой Ньютона — Лейбница* в честь английского физика Исаака Ньютона (1643—1727) и немецкого философа Готфрида Лейбница (1646—1716), получивших ее независимо друг от друга и практически одновременно.

На практике вместо записи $F(b) - F(a)$ используют запись $F(x)\Big|_a^b$ (ее называют иногда *двойной подстановкой*) и, соответственно, переписывают формулу Ньютона — Лейбница в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Вычисляя определенный интеграл, сначала находят первообразную, а затем осуществляют двойную подстановку.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^{3} x^3 dx$.

Решение. Первообразной для x^3 служит $\frac{x^4}{4}$. Значит,

$$\int_{-1}^{3} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью абсцисс.

Решение. Можно взять полуволну синусоиды от точки $x = 0$ до точки $x = \pi$ (рис. 228) и воспользоваться формулой (1) при следующих условиях: $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin x$. Получим:

$$S = \int_{0}^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{0}^{\pi} =.$$

$$= -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$$

(в процессе вычислений мы учли, что первообразной для $\sin x$ является $-\cos x$).

Ответ: $S = 2$.

Опираясь на формулу Ньютона — Лейбница, можно получить два свойства определенного интеграла.

Свойство 1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов:

$$\int_{a}^{b} (f(x) + g(x))dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

Доказательство. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x) + G(x)$ — первообразная для $f(x) + g(x)$. Тогда

$$\int_{a}^{b} (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x))\Big|_{a}^{b} =$$

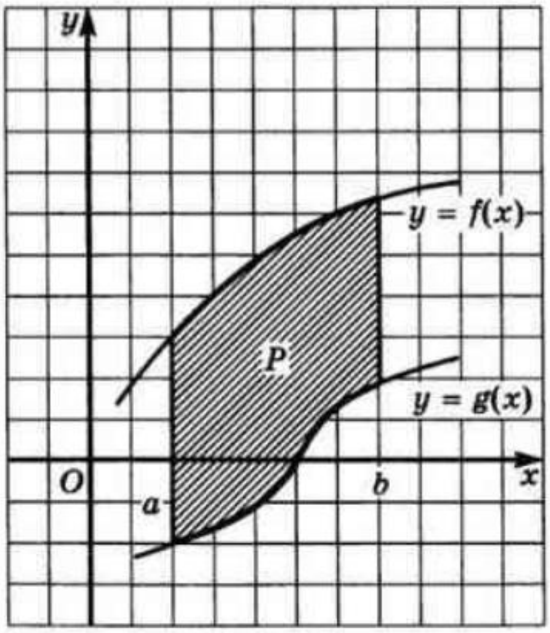
$$= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) =$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_{a}^{b} kf(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла



Фигура P ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, причем на отрезке $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$. Чтобы вычислить площадь S такой фигуры, будем действовать следующим образом.

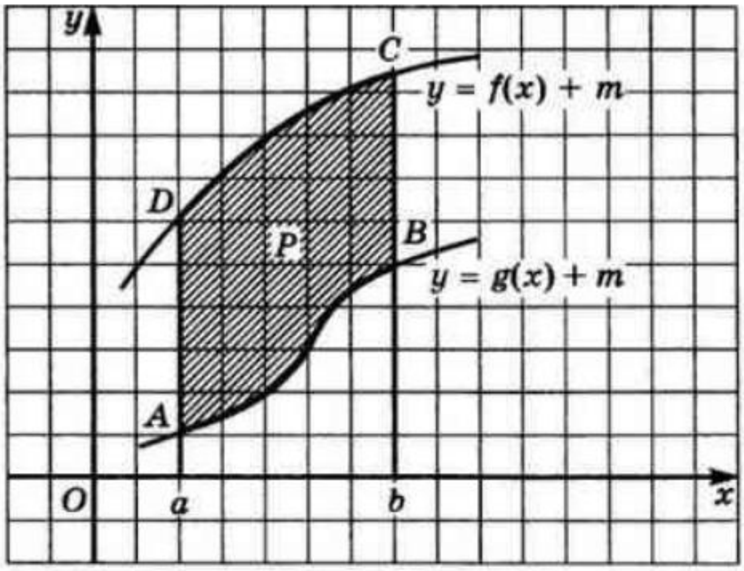


Рис. 231

Выполним параллельный перенос фигуры P на m единиц вверх ($m > 0$) так, чтобы фигура P оказалась расположенной в координатной плоскости выше оси абсцисс (рис. 231). Теперь она ограничена сверху и снизу графиками функций $y = f(x) + m$, $y = g(x) + m$, причем обе функции непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a; b]$. Имеем:

$$S = S_{ABCD} = S_{aDCb} - S_{aABb} = \int_a^b (f(x) + m)dx - \int_a^b (g(x) + m)dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + m) - (g(x) + m))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Итак, *площадь S фигуры, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и графиками функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и таких, что для любого x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $g(x) \leqslant f(x)$, вычисляется по формуле*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.} \qquad (2)$$

Пример Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = 1$, $x = e$ и гиперболой $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Речь идет о вычислении площади криволинейной трапеции, изображенной на рисунке 232. Имеем:

$$S = \int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

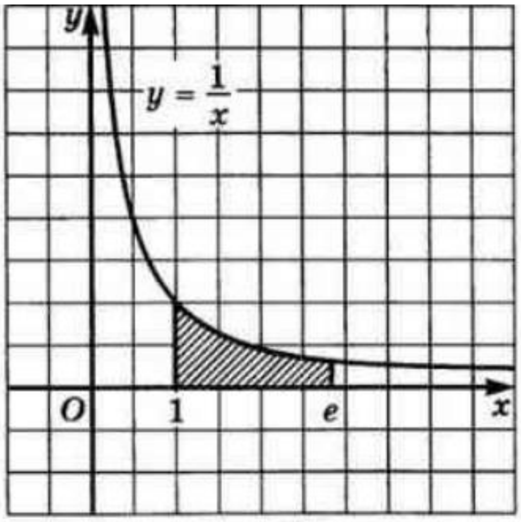


Рис. 232

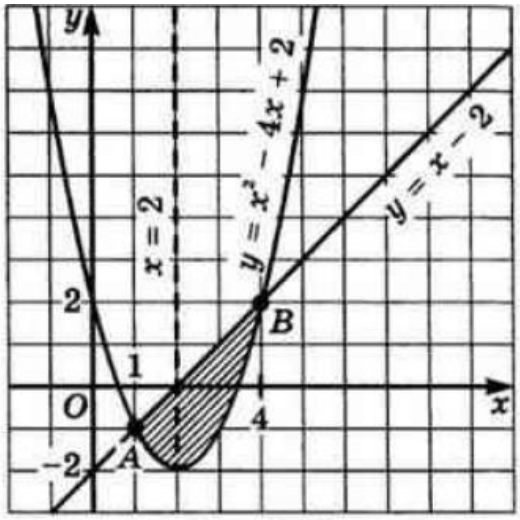


Рис. 233

Пример Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 - 4x + 2$.

Решение. Прямую $y = x - 2$ можно построить по точкам (2; 0) и (0; −2) (рис. 233). Абсциссу вершины параболы найдем из условия $y' = 0$. Имеем:

$$y' = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4;$$
$$2x - 4 = 0;$$
$$x = 2.$$

Если $x = 2$, то $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 2 = -2$.

Значит, вершиной параболы служит точка (2; −2), а осью параболы — прямая $x = 2$. Возьмем две пары точек, симметричных относительно оси параболы: (1; −1) и (3; −1), (0; 2) и (4; 2), и построим параболу по пяти точкам (рис. 233). Парабола и прямая пересекаются в точках A и B, для отыскания абсцисс этих точек надо решить уравнение $x^2 - 4x + 2 = x - 2$.

Находим последовательно:

$$x^2 - 5x + 4 = 0;$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = 4.$$

Фигура, площадь которой надо найти, ограничена линиями $y = x^2 - 4x + 2$ (снизу) и $y = x - 2$ (сверху). Можно считать, что с боков эта фигура ограничена прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Значит, для вычисления площади фигуры можно применить формулу :

$$S = \int_1^4 ((x - 2) - (x^2 - 4x + 2))dx = \int_1^4 (5x - x^2 - 4)dx =$$

$$= \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_1^4 = \left(5 \cdot \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4\right) - \left(5 \cdot \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1\right) = 4{,}5.$$

Ответ: $S = 4{,}5$.