Задание №1

Производные функций

Изучалась тема «Производные функций»

Раздел 1. Основные понятия и методы математического анализа.

Тема 1.1. Основные понятия математического анализа

Производная функции, геометрический смысл. Применение производной.

Производная функции, геометрический смысл.

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).Назовём $\Delta x = x - x_0$ приращением аргумента функции, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$приращением значения функции в точкеx_0.Тогда $f'(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрированием.

Формулы и правила дифференцирования

$(x)' = 1$

$(x^2)' = 2x$

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(C)' = 0$

$(Cu)' = C(u)'$

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим график функции $y=f(x)$:

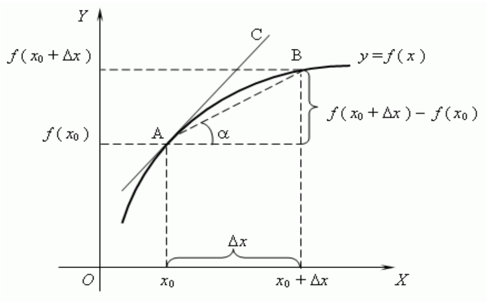

Рис. 1

Из рис.1 видно, что для любых двух точек А и В графика функции: $\mathrm{tg}\alpha = \lim_{x\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где α-угол наклона секущей АВ.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку А и двигать по направлению к ней точку В, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая АВ приближается к касательной АС. Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке А. Отсюда следует: *производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.* В этом и состоит *геометрический смысл* производной.

Уравнение касательной к графику функции в точке $A(x_0, f(x_0))$имеет вид:

$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Применение производной.

Механический смысл производной.

Рассмотрим простейший случай: движение материальной точки вдоль координатной оси, причём закон движения задан: координата *x* движущейся точки – известная функция *x (t)* времени *t*. В течение интервала времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ точка перемещается на расстояние: $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\Delta x$, а её *средняя скорость* равна: $v_a = \Delta x/\Delta t$.При $\Delta t \to 0$ значение средней скорости стремится к определённой величине, которая называется *мгновенной скоростью* $v\ (t_0)$ материальной точки в момент времени t_0. Но по определению производной мы имеем:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0),$$

отсюда, $v(t_0)= x'(t_0)$,т.е. скорость – это производная координаты по времени. В этом и состоит механический смысл производной. Аналогично, ускорение – это производная скорости по времени: $a=v'(t)$.

Применение производной в исследовании функций

Достаточные признаки монотонности функции.

Если $f'(x)>0$в каждой точке интервала (a,b),то функция f (x)возрастает на этом интервале.

Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала (a,b), то функция f (x)убывает на этом интервале.

Критические точки. Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки очень важны при анализе функции и построении её графика, потому что только в этих точках функция может иметь *экстремум*(*минимум* или *максимум*,рис.5*а*,*б*).

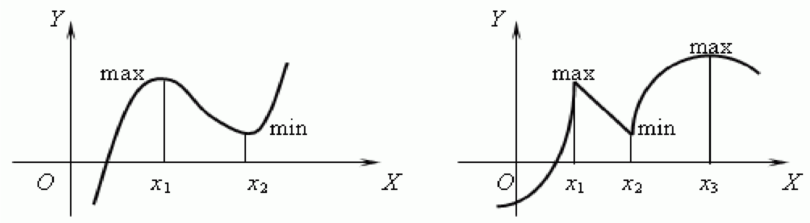

Рис. 5*а* Рис. 5*б*

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) функции.
Пусть функция $f(x)$дважды дифференцируема (имеет *вторую* производную) на интервале (a,b), тогда:
Если $f''(x)>0$ для любого $x \in (a,b)$,то функция $f(x)$ является ***вогнутой*** на интервале (a,b);
если $f''(x)<0$ для любого $x \in (a,b)$,то функция $f(x)$ является ***выпуклой*** на интервале (a,b).
Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*. Отсюда следует, что если в точке перегиба x_0существует вторая производная $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

Практическое задание «Вычисление производных»

Функция	Производная	Функция	Производная
$y=2x-6$		$y=5-4x$	
$y=x^2+\cos x$		$y=2x^2+7x-18$	
$y=\sqrt{x}\cdot\sin x$		$y=x\sqrt{x}$	
$y=(3x+2)^2$		$y=\sin x$	
$y=\cos x-2\sqrt{x}$		$y=\frac{5}{x}+4x^2-7x$	
$y=4x^2-x+3x^3$		$y=\frac{2x+3}{3x-1}$	
$y=\frac{2x^2+3}{-3x+2}$		$y=\frac{5x^3+3x}{3x+7}$	