Занятие «Интегралы, производные»

Первообразная. Неопределенный интеграл. Способы вычисления неопределенного интеграла.

Первообразная. Неопределённый интеграл.

Первообразная. Непрерывная функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для каждого $x \in X$

$F'(x)=f(x)$.

Неопределённый интеграл функции $f(x)$ на промежутке X есть *множество всех её первообразных*. Это записывается в виде:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

Где C–любая постоянная, называемая *постоянной интегрирования*.

Некоторые неопределённые интегралы от элементарных функций

$$\int dx = x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$$

Основные свойства неопределённого интеграла

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную на промежутке X, и k– число, то

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$$

Короче: *постоянную можно выносить за знак интеграла.*

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные на промежуткеX, то

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Короче: *интеграл суммы равен сумме интегралов.*

Методы интегрирования (Способы вычисления неопределенного интеграла.)

Интегрирование подстановкой (замена переменной).Если функция $f(z)$ определена и имеет первообразную при $z \in \boldsymbol{Z}$, а функция $z=g(x)$имеет непрерывную производную при $x \in \boldsymbol{X}$ и её область значений $g(\boldsymbol{X}) \subset \boldsymbol{Z}$, то функция $F(x)=f[g(x)]\,g'(x)$ имеет первообразную на X и

$\int F(x)dx = \int f[g(x)] \cdot g'(x)dx = \int f(z)dz$.

П р и м е р. Найти интеграл: $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Р е ш е н и е. Чтобы избавиться от квадратного корня, положим $\sqrt{x-3}=u$,тогда $x = u^2+3$и,следовательно, $dx = 2u\, du$. Делая подстановку, имеем:

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \int (u^2+3)\,u\,2u\,du = \int (2u^4+6u^2)\,du = 2u^5/5 + 2u^3 =$$

$$= \frac{2(x-3)^{5/2}}{5} + 2(x-3)^{3/2} + C.$$

Интегрирование по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные первые производные и существует интеграл $\int v(x)du(x)$,то существует и интеграл $\int u(x)dv(x)$и имеет место равенство:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)du(x)$$

или в более короткой форме:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Обратите внимание, что интегрирование по частям и дифференциал произведения являются взаимно обратными операциями (проверьте!).

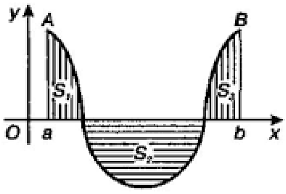
П р и м е р . Найти интеграл:, $\int \ln x\,dx$.

Р е ш е н и е. Предположим $u = \ln x$ и $dv = dx$, тогда $du = dx/x$ и $v = x$. Используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,dx/x = x\ln x - x + C.$$

Определенный интеграл. Геометрический смысл определенного интеграла.

Определенный интеграл от функции y = f(x) по отрезку [a, b] равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции y = f{x), слева и справа — отрезками прямых x = a, x = b, снизу — отрезком оси Ox (см. рис.).



Применение определённого интеграла к решению прикладных задач.

Формула Ньютона – Лейбница**.** Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Задача о вычислении пути

Согласно физическому смыслу первой производной, производная функции в точке есть мгновенная скорость точки, т.е. $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$. Отсюда, $ds = v(t)dt$. Интегрируя полученное равенство в пределах от t1 до t2 получаем

$$\int ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

Тогда путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью (е) за отрезок времени [t]выражается интегралом

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt.$$

Задача. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью v =(6t +2t)м/с, второе – со скоростью v =(4t+5)м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Пример 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1=(6t^2+2t)$м/с, второе – со скоростью $v_2=(4t+5)$м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Практическое задание

«Распечатка для курсантов» представляет собой задание для обучающихся на Заочном отделении по темам: производные функций

применение производных для решения задач

неопределенные интегралы

Распечатка для курсантов

Функция	Производная	Функция	Производная
$y=2x-6$		$y=5-4x$	
$y=x^2+\cos x$		$y=2x^2+7x-18$	
$y=\sqrt{x}\cdot\sin x$		$y=x\sqrt{x}$	
$y=(3x+2)^2$		$y=\sin x$	
$y=\cos x-2\sqrt{x}$		$y=\frac{5}{x}+4x^2-7x$	
$y=4x^2-x+3x^3$		$y=\frac{2x+3}{3x-1}$	
$y=\frac{2x^2+3}{-3x+2}$		$y=\frac{5x^3+3x}{3x+7}$	

$\int(-x+\sqrt{x})\,dx$		$\int(1+\cos x)\,dx$	
$\int\cos x\,dx$		$\int\frac{1}{x}dx$	
$\int 3dx$		$\int(2-5x)\,dx$	
$\int\frac{1}{3}x\,dx$		$\int(2-x)\,dx$	
$\int\sqrt{x}dx$		$\int\frac{4}{x}dx$	
$\int x^3dx$		$\int(\sin x-\cos x)\,dx$	
$\int\frac{3}{\cos^2 x}dx$		$\int(x-1)\,dx$	
$\int(2x-1)dx$		$\int 2\sqrt{x}dx$	
$\int\sin x\,dx$		$\int\sqrt{2x-3}dx$	

Тело движется по закону $S=-5t+5t^2+15$ (м). Найти скорость в момент времени t=3с.	
$S'(t)=v(t)=-5+10t$	$v(3)=-5+10\cdot3=25$
Тело движется по закону $S=2t^2+13t-11$ (м). Найти скорость в момент времени t=3с.	
Тело движется по закону $S=7t^2-6t+11$ (м). Найти скорость в момент времени t=3с.	
Тело движется по закону $S=-t^3+3t^2-11$ (м). Найти скорость в момент времени t=2с.	
Тело движется по закону $S=-t^2+6t-12$ (м). Найти скорость в момент времени t=24с.	
Тело движется по закону $S=6t^2-3t-1$ (м). Найти скорость в момент времени t=6с.	