Тема 3.1. Синусоидальные э.д.с. и токи

Вопросы:

1. Переменный ток, его получение.
2. Характеристики синусоидальных функций
3. Действующие значения тока и напряжения. Понятие векторной диаграммы

Переменный ток, его получение

Переменным называется ток, который изменяется в течение времени по величине или направлению.

Переменный ток получил преимущественное распространение в промышленности, что связано с его преимуществами перед постоянным током.

Преимущества переменного тока:

- легко повышается и понижается напряжение с помощью трансформаторов;
- генераторы и двигатели переменного тока проще по устройству, в эксплуатации, надежней и дешевле;
- переменный ток удобнее вырабатывать на электростанциях;
- многие физические явления проявляются только при переменном токе.

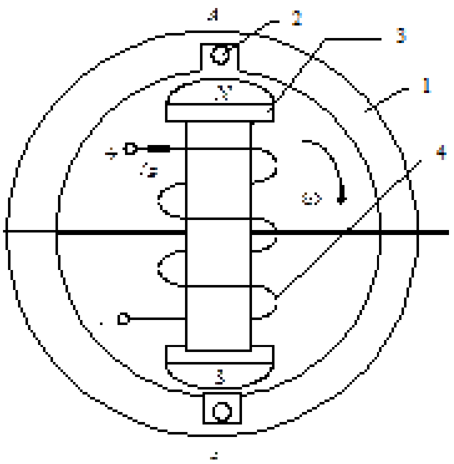
В электрических цепях переменного тока наиболее часто используют синусоидальную форму, характеризующуюся тем, что все токи и напряжения являются синусоидальными функциями времени. Синусоидальная форма тока и напряжения позволяет производить точный расчет электрических цепей с использованием метода комплексных чисел и приближенный расчет на основе метода векторных диаграмм.

Недостатки:

- в цепях питания потребителей таким током могут происходить перегрузки, вызванные реактивной мощностью потребителей (когда в цепи питания присутствуют индуктивности или емкости);
- второй главный недостаток переменного тока заключается в том, что он протекает не по всему сечению проводника, а вытесняется ближе к его поверхности. В результате снижается площадь, по которой протекает электрический ток, что в свою очередь приводит к увеличению сопротивления проводника и к росту потерь мощности в нем. Чем выше частота, тем сильнее вытесняется ток к поверхности проводника и в конечном счете, тем выше потери мощности.
- переменный ток приводит к образованию переменных электромагнитных полей, воздействующих на работу различной радиоаппаратуры и др.

Получение переменного тока

Переменный ток получают при помощи синхронных генераторов.



Синхронный генератор состоит из статора 1, обмотки статора 2, ротора 3 и обмотки возбуждения 4.

Ротор выполнен в виде постоянного магнита или электромагнита с полюсами *N* и *S*. Магнитное поле ротора возбуждается обмоткой возбуждения, по которой протекает постоянный ток возбуждения I_B. Ротор принудительно приводится во вращение с частотой ω от постороннего двигателя, который называется первичным. (Т.е. к ротору подводится механическая энергия). При вращении магнитное поле ротора пересекает обмотку статора и в соответствии с законом электромагнитной индукции в ней индуцируется ЭДС:

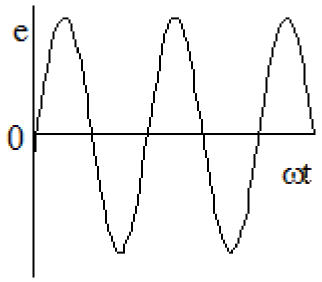
$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha$,

где *B* - индукция магнитного поля полюсов ротора;

l - длина активной части обмотки статора;

v - линейная скорость пересечения магнитным полем обмотки статора.

Форма изменения ЭДС обмотки статора синусоидальна:



Характеристики синусоидальных функций

Синусоидально изменяющиеся величины характеризуются следующими основными параметрами:

− период *T*, [с] - время совершения одного полного колебания синусоидальной величины;

− частота *f*, [c^{-1}]=[Гц] - количество периодов, укладывающихся в единицу времени:

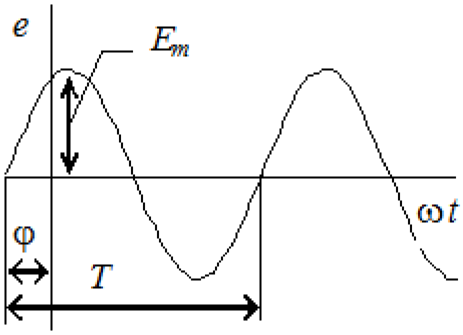
$f = 1/T$

В нашей стране частота тока в сети *f*=50 Гц (достигается вращением роторов в генераторах с частотой вращения n вр =3000 мин-1 (об/мин);

− угловая (циклическая) частота изменения тока:

ω=2πf рад/с. Для нашей сети ω =314 рад/с;

− амплитуда Im, Em, Um - наибольшее значение синусоидальной величины.



Амплитудные значения синусоидальных функций являются постоянными величинами, т.е. от времени они не зависят.

– мгновенные значения синусоидальных функций обозначают маленькими буквами: *i, e, u*. Они являются функциями времени. Зависимость их от времени выражается соотношениями:

$i=I_m\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_i)$

$u=Um\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_u)$

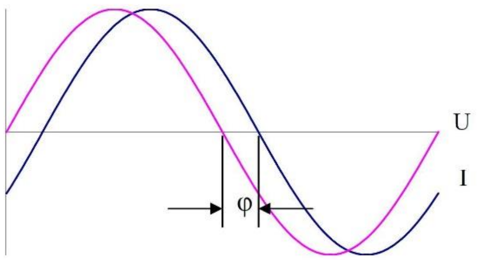
$e=Em\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_e)$

– *фаза* - аргумент синусоидальной функции $(\omega\cdot t+\varphi)$- показывает, какое значение имеет синусоидальная функция в данный момент времени;

– *начальная фаза* φ_0 - показывает, какое значение имеет синусоидальная функция в момент начала отсчета, т.е. при t=0;

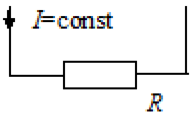
- сдвиг фаз — разность между начальными фазами двух переменных величин, изменяющихся во времени периодически с одинаковой частотой.

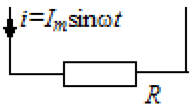
$\varphi= \varphi_u- \varphi_i$



Действующие значения тока и напряжения. Понятие векторной диаграммы

Действующим значением переменного тока называют такое значение постоянного тока I, который, протекая по сопротивлению R, за время, равное одному периоду T изменения тока, выделяет в нем такое же количество теплоты Q, что и переменный ток i. Поясним определение на примере:





$$Q = I^2 \cdot R \cdot T = \int_0^T i^2 \cdot Rdt$$

После подстановки значения тока *i* и последующих преобразований получим, что действующее значение переменного тока равно:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Аналогичные соотношения могут быть получены также для напряжения и ЭДС:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Большинство электроизмерительных приборов измеряют не мгновенные, а действующие значения токов и напряжений.

Учитывая, например, что действующее значение напряжения в нашей сети составляет 220 В, можно определить амплитудное значение напряжения в сети: $U_m = U\sqrt{2} = 311$В.

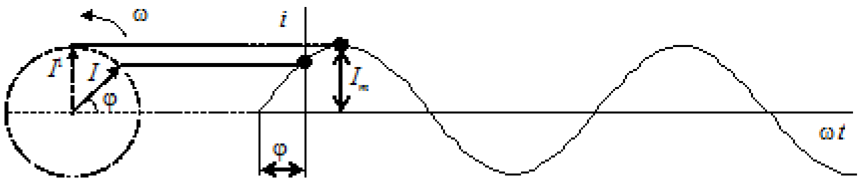
Соотношение между действующим и амплитудным значениями напряжений и токов важно учитывать, например, при проектировании устройств с применением полупроводниковых элементов.

Векторные диаграммы

Производить операции умножения, сложения и т.п. с токами и напряжениями, изображенными в виде волновых диаграмм, неудобно. Поэтому на практике синусоидальные величины представляют в виде векторов, а затем указанные операции производят с ними. Это значительно упрощает расчеты и делает их более наглядными.

Представление синусоиды в виде волновой диаграммы и вращающегося вектора показано на рисунке.

Вращая вектор *I* против часовой стрелки его конец будет описывать окружность. При вращении вектора с частотой w его проекция на вертикальную ось изменяется по синусоидальному закону и равна мгновенному значению синусоиды в соответствующие моменты времени.



Хорошо видны следующие аналогии:

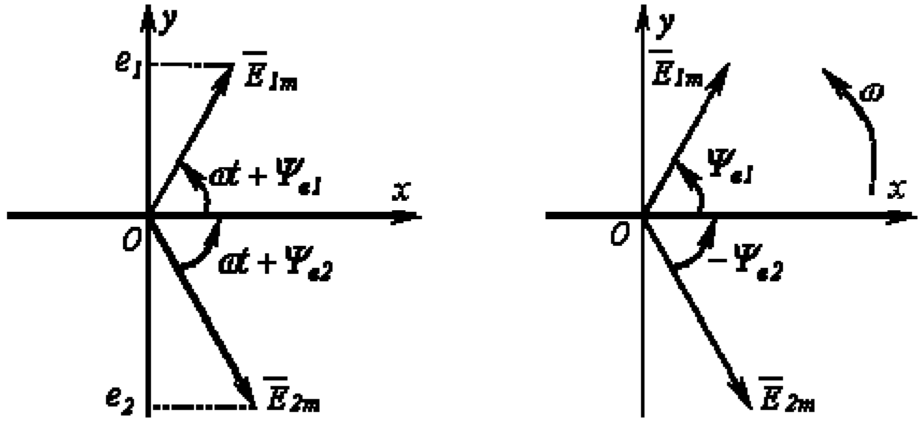
– длина вектора равна амплитуде синусоиды;

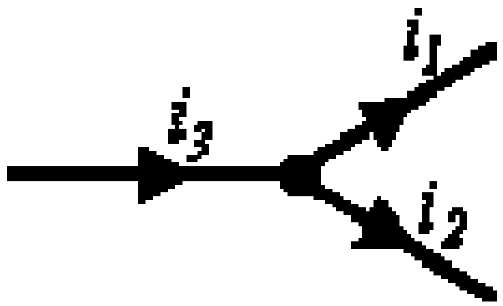
– угол между горизонтальной осью и вектором равен начальной фазе синусоиды.

В электротехнике векторы изображают не вращающимися, а неподвижными, для момента времени t=0 . Часто масштабы векторов выбирают так, чтобы длина вектора соответствовала не амплитуде, а действующему значению. Угол наклона к оси абсцисс равен начальной фазе. Учитываемые параметры (действующее значение и начальная фаза) полностью определяют синусоидальную функцию и позволяют для любого вектора восстановить ее и наоборот.

Так можно представить целую совокупность различных величин *u*, *i*, *e*. Если эти величины одинаковой частоты, то их совокупность представляет собой *векторную диаграмму*.

Векторной диаграммой принято называть геометрическое представление изменяющихся по синусоидальному закону направленных отрезков — векторов, отображающих параметры и величины действующих синусоидальных токов, напряжений и эдс одной частоты, либо их амплитудных величин.



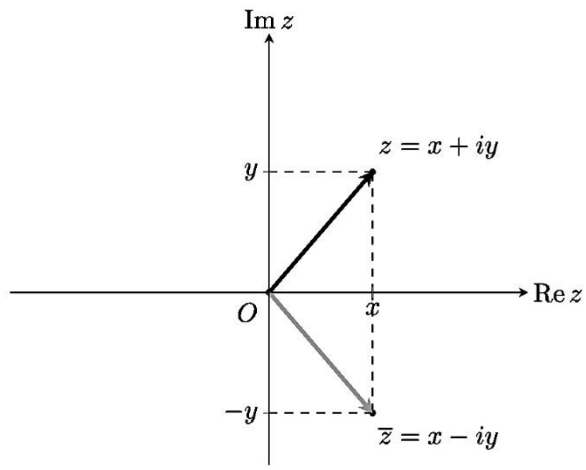


На рисунке для примера представлена совокупность векторов I_1 и I_2, а также результирующий вектор I_3, определяемый их суммой.

Угол измеренный между векторами называют *углом сдвига фаз*. Если угол между двумя векторами равен нулю, то говорят, что они совпадают по фазе. Если угол равен 180°, то говорят, что векторы находятся в противофазе.

Вектор синусоидально изменяющейся величины чаще всего представляется на **комплексной плоскости**.

Комплексные представления позволяют совместить простоту и наглядность векторных диаграмм, имеющих недостаток – ограниченную точность, с возможностью проведения точных аналитических расчетов.



При оперировании с векторами можно воспользоваться теорией, разработанной для комплексных чисел. Вектору, расположенному на комплексной плоскости, однозначно соответствует комплексное число, которое может быть записано в трёх формах:

- Показательной $\dot{z} = |z|e^{j\varphi}$

- Тригонометрической $\dot{\boldsymbol{z}} = |z|\,(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{j}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi})$
- Алгебраической $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{jy}$

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{jy}$ это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение, x – действительная часть комплексного числа, y – мнимая часть.

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица

$|z| = |x + jy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа

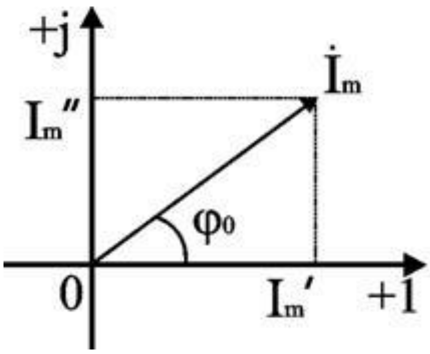
Мнимая единица в электротехнике обозначается символом j, поскольку символ i используется для обозначения мгновенного тока.

Использование комплексной формы представления позволяет заменить геометрические операции над векторами алгебраическими операциями над комплексными числами. В результате этого к анализу цепей переменного тока могут быть применены все методы анализа цепей постоянного тока.

Следует обратить внимание на то, что комплексные изображения, как и векторные диаграммы, несут информацию только о двух параметрах синусоиды – амплитуде и начальной фазе, не отражая ее третьего параметра – угловую частоту ω. Векторы на комплексной плоскости и соответствующие им комплексные числа принято изображать той же буквой, что и амплитуду изображаемой синусоиды с точкой наверху.

Ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_o)$ можно представить комплексным числом $\dot{I}_m$ на комплексной плоскости, где амплитуда тока I_m – *модуль*, а угол φ_o, являющийся начальной фазой, – *аргумент* комплексного тока.

Все параметры цепи представляются в комплексной форме.



Алгебраическая форма записи комплексного числа:

$\dot{I}_m = I'_m + jI_m{}''$

При записи в тригонометрической форме проекции вектора выражают через его длину I_m и угол φ_o:

$\dot{I}_m = I_m cos\varphi_0 + jI_m sin\varphi_0 = I_m(cos\varphi_0 + jsin\varphi_0)$

Показательная форма записи имеет вид

$\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi_0}$

В этих выражениях

$I_m = \sqrt{I'^2_m + I''^2_m}$ – модуль комплексного числа,

$\varphi_0 = arctg\frac{I''_m}{I'_m}$ - его аргумент,

$I'_m = I_m cos\varphi_0 \quad I''_m = I_m sin\varphi_0$

$\dot{I} = Ie^{j\varphi_0}$ – комплексное действующее значение силы тока (без индекса m); здесь $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{I_m}}{\sqrt{2}}$;

$\dot{U} = Ue^{j\varphi_0}$ – комплексное действующее значение напряжения; $\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{U_m}}{\sqrt{2}}$

Электрическая цепь с активным и реактивным сопротивлением

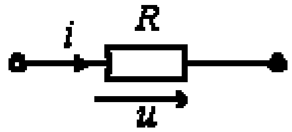
Цепь переменного тока с активным сопротивлением. Векторная диаграмма

В электрической цепи переменного тока существует два вида сопротивлений: **активное** и **реактивное**. Это является существенным отличием от цепей постоянного тока.

Активное сопротивление — сопротивление электрической цепи или её участка, обусловленное необратимыми превращениями электрической энергии в другие виды энергии (в тепловую).

При прохождении тока через элементы, имеющие активное сопротивление, потери выделяющейся мощности необратимы. Примером может служить резистор, выделяющееся на нем тепло, обратно в электрическую энергию не превращается. Кроме резистора активным сопротивлением может обладать линии электропередач, соединительные провода, обмотки трансформатора или электродвигателя.

Рассмотрим цепь, состоящую из сопротивления *R*.



К зажимам цепи приложено синусоидальное напряжение

u=Um·sin(ω·t+φ)

По закону Ома мгновенное значение тока будет равно:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t + \varphi) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

или, переходя к действующим значениям, получаем:

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{r \cdot \sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R}$$

В записи через комплексные числа:

$$\dot{U} = Ue^{j\varphi}$$

$$\dot{I} = Ie^{j\varphi}$$

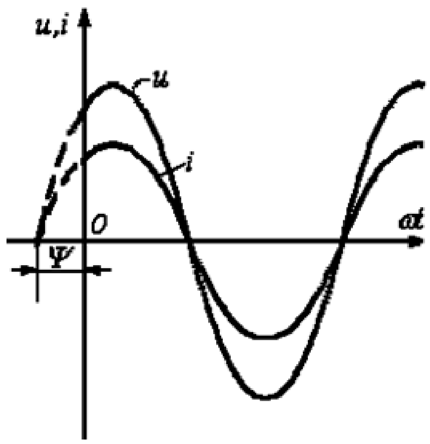
Разделив выражения друг на друга получаем;

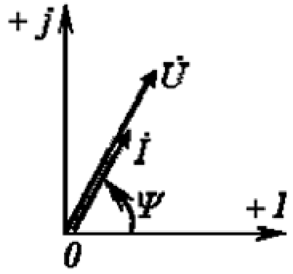
$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi}}{Ie^{j\varphi}} = \frac{U}{I} = R \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$$

Вид закона Ома для цепи переменного тока, содержащей только активное сопротивление, тот же, что для цепи постоянного тока.

Кроме того, из закона Ома видна пропорциональность между мгновенным значением напряжения и мгновенным значением тока. Отсюда следует, что в цепи переменного тока, содержащей сопротивление R, напряжение и ток совпадают по фазе.

На рисунке даны кривые напряжения и тока и векторная диаграмма для рассматриваемой цепи.





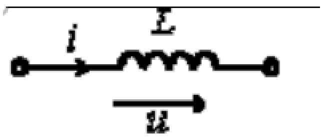
Сопротивление проводников переменному току несколько больше их сопротивления постоянному току. Это объясняется поверхностным эффектом. Поэтому сопротивление проводников переменному току называют **активным**. Обозначается оно также буквой *R*.

Активное сопротивление зависит от физических параметров проводника, таких как материал, площадь сечения, длина, температура.

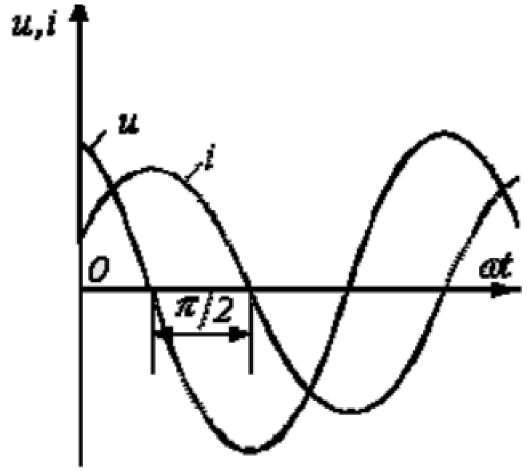
Цепь переменного тока с реактивным сопротивлением

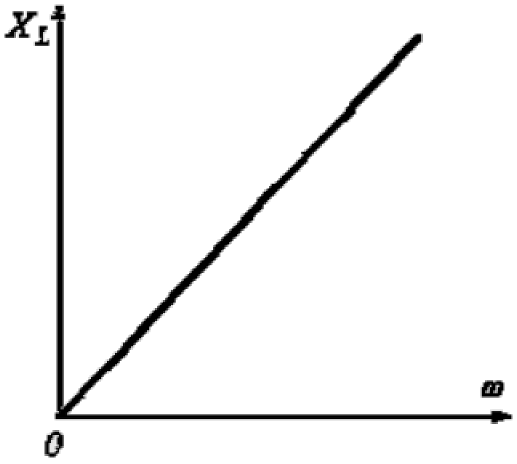
При прохождении переменного тока через реактивные элементы возникает **реактивное сопротивление**. Оно обусловлено в первую очередь ёмкостями и индуктивностями.

Индуктивностью в цепи переменного тока обладает катушка индуктивности, причём в идеальном случае, активным сопротивлением её обмотки пренебрегают. Реактивное сопротивление катушки переменному току создаётся благодаря её ЭДС самоиндукции. Причем с ростом частоты тока, сопротивление также растёт.



Напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе ток на π/2 (90º):





Сопротивление катушки зависит от частоты тока и индуктивности катушки и называется **реактивным индуктивным сопротивлением.** Единица измерения – Ом.

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

Мгновенное напряжение и ток катушки, а также их комплексная форма имеют вид:

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = Ue^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = Ie^{j\varphi}$$

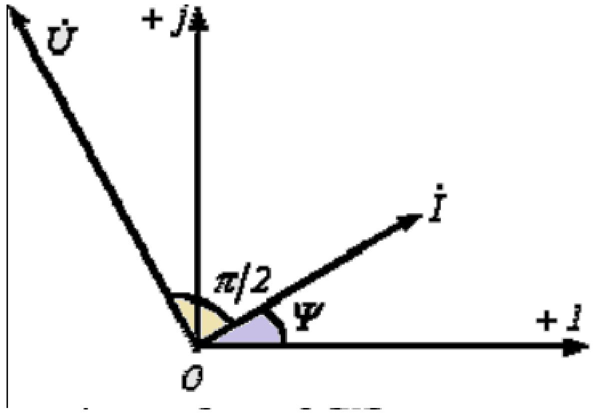
Разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j(\varphi+\frac{\pi}{2})}}{Ie^{j\varphi}} = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L = Z_L$$

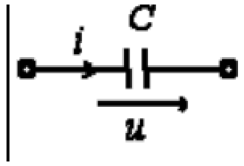
Или

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{\dot{U}}{Z_L}$$

В полученном соотношении Z_L- комплексное сопротивление катушки индуктивности. Умножение на j=$e^{j\frac{\pi}{2}}$ соответствует повороту вектора на угол π/2 против часовой стрелки. Соответствующая векторная диаграмма для цепи с катушкой представленная на рисунке.



Конденсатор обладает реактивным сопротивлением благодаря своей ёмкости. Его сопротивление с увеличением частоты тока уменьшается, что позволяет его активно использовать в электронике в качестве шунта переменной составляющей тока.

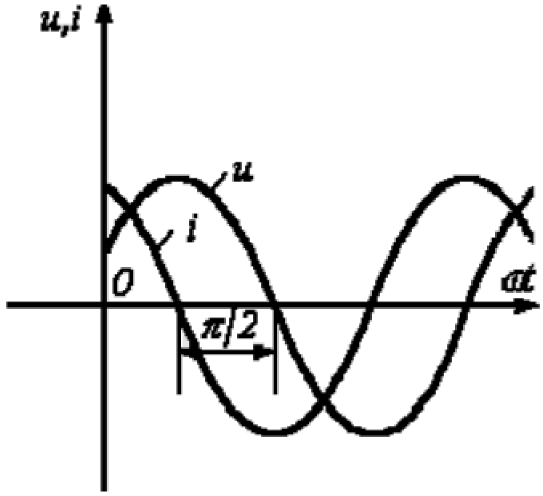


Сопротивление конденсатора называют **реактивным емкостным сопротивлением** конденсатора и его можно рассчитать по формуле:

$$X_c = \frac{1}{\omega C}$$

Единица измерения – Ом.

Напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на π/2



Формулы мгновенных тока и напряжения, и их комплексы имеют вид:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot{U} = Ue^{j\varphi}$$

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \dot{I} = Ie^{j(\varphi + \frac{\pi}{2})}$$

При делении получаем:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi}}{Ie^{j(\varphi+\frac{\pi}{2})}} = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_C = Z_C$$

$$\dot{I} = -\frac{\dot{U}}{jX_L} = \frac{\dot{U}}{Z_C}$$

$-jX_C = Z_C$- комплексное сопротивление конденсатора. Умножение на $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ соответствует повороту вектора на угол π/2 по часовой стрелке. Следовательно, уравнению соответствует векторная диаграмма, представленная на рисунке: