

Задание №1

Производные функций

В понедельник 01.02.2021 изучалась тема «Производные функций»

Раздел 1. Основные понятия и методы математического анализа.

Тема 1.1. Основные понятия математического анализа

Производная функции, геометрический смысл. Применение производной.

Производная функции, геометрический смысл.

Производная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке). Назовём $\Delta x = x - x_0$ приращением аргумента функции, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ приращением значения функции в точке x_0 . Тогда $f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Процесс вычисления производной называется *дифференцированием*. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрированием.

Формулы и правила дифференцирования

$$(x)' = 1$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(C)' = 0$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(Cu)' = C(u)'$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим график функции $y=f(x)$:

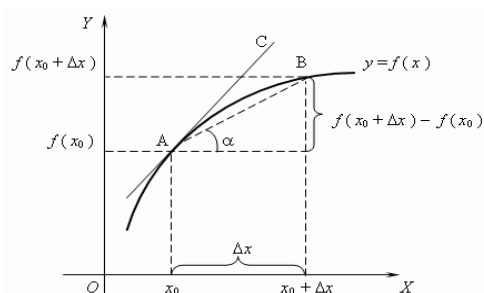


Рис. 1

Из рис. 1 видно, что для любых двух точек A и B графика функции: $\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, где α -угол наклона секущей AB.

Таким образом, разностное отношение равно угловому коэффициенту секущей. Если зафиксировать точку A и двигать по направлению к ней точку B, то Δx неограниченно уменьшается и приближается к 0, а секущая AB приближается к касательной AC.

Следовательно, предел разностного отношения равен угловому коэффициенту касательной в точке A. Отсюда следует: *производная функции в точке есть угловой коэффициент касательной к графику этой функции в этой точке.* В этом и состоит *геометрический смысл* производной.

Уравнение касательной к графику функции в точке $A(x_0, f(x_0))$ имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Применение производной.

Механический смысл производной.

Рассмотрим простейший случай: движение материальной точки вдоль координатной оси, причём закон движения задан: координата x движущейся точки – известная функция $x(t)$ времени t . В течение интервала времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ точка перемещается на расстояние: $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) = \Delta x$, а её *средняя скорость* равна: $v_a = \Delta x / \Delta t$. При $\Delta t \rightarrow 0$ значение средней скорости стремится к определённой величине, которая называется *мгновенной скоростью* $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0 . Но по определению производной мы имеем:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0),$$

отсюда, $v(t_0) = x'(t_0)$, т.е. скорость – это производная координаты по времени. В этом и состоит механический смысл производной. Аналогично, ускорение – это производная скорости по времени: $a = v'(t)$.

Применение производной в исследовании функций

Достаточные признаки монотонности функции.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала (a, b) , то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала (a, b) , то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Критические точки. Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки очень важны при анализе функции и построении её графика, потому что только в этих точках функция может иметь *экстремум* (минимум или максимум, рис. 5а, б).

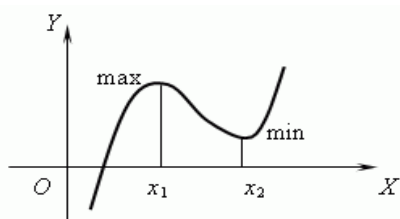


Рис. 5а

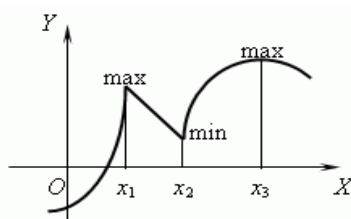


Рис. 5б

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) функции.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема (имеет *вторую* производную) на интервале (a,b) , тогда:

Если $f''(x) > 0$ для любого $x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ является **вогнутой** на интервале (a,b) ;

если $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ является **выпуклой** на интервале (a,b) .

Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*. Отсюда следует, что если в точке перегиба x_0 существует вторая производная $f''(x_0)$, то $f''(x_0) = 0$.

Практическое задание «Вычисление производных»

| Функция | Производная | Функция | Производная |
|--------------------------|-------------|--------------------------|-------------|
| $y=2x-6$ | | $y=5-4x$ | |
| $y=x^2+\cos x$ | | $y=2x^2+7x-18$ | |
| $y=\sqrt{x}\cdot\sin x$ | | $y=x\sqrt{x}$ | |
| $y=(3x+2)^2$ | | $y=\sin x$ | |
| $y=\cos x-2\sqrt{x}$ | | $y=\frac{5}{x}+4x^2-7x$ | |
| $y=4x^2-x+3x^3$ | | $y=\frac{2x+3}{3x-1}$ | |
| $y=\frac{2x^2+3}{-3x+2}$ | | $y=\frac{5x^3+3x}{3x+7}$ | |